



Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4295 Statistisk inferens

Fredag 3. desember 2010 kl. 9–13

Hjelpemiddel: Gult A5-ark med eigne handskrivne notat (stempla av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 24. desember 2010

I vurderinga tel kvart av dei ti bokstavpunkta likt.

Alle svara skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller døme frå pensum).

I heile oppgåvesettet gjeld det at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige stokastiske variablar frå ei fordeling som har sannsynstettleik f gitt ved $f(x) = \theta/(1+x)^{\theta+1}$ for $x \geq 0$ og $f(x) = 0$ elles, der $\theta > 1$ er ein parameter.

Oppgåve 1

- a) Vis at momentestimatore for θ er $\tilde{\theta} = 1 + \frac{1}{\bar{X}}$.
- b) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren for θ er $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)}$.
- c) Vis at Cramér–Rao sin nedre skranke for variansen til ein forventningsrett estimator for θ er θ^2/n .
- d) Vis at $E\hat{\theta} = \frac{n\theta}{n-1}$ og $\text{Var } \hat{\theta} = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-1)^2}$.
(Vink: Vis at $\ln(1+X_i)$ er eksponentielt fordelt, slik at $\hat{\theta} = n/Z$, der Z er gammafordelt.)
- e) Vis at klassen av sannsynstettleikar f er ein eksponentiell fordelingsklasse. Vis at $\sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)$ er ein komplett suffisient observator for θ .
- f) Finn den unike beste (som har uniformt minimal varians) forventningsrette estimatoren for θ .
- g) Kva er den asymptotisk relative effisiensen av $\tilde{\theta}$ med omsyn på $\hat{\theta}$ for $\theta > 2$? Finn den numeriske verdien når $\theta = 3$.

Oppgåve 2

- a) Finn eit tilnærma $1 - \alpha$ -konfidensintervall for θ på grunnlag av sannsynsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$. Kva er den realiserte numeriske verdien av intervallet dersom $n = 10$, $\hat{\theta} = 3,23$ og $\alpha = 0,05$?
- b) Finn òg eit eksakt $1 - \alpha$ -konfidensintervall. (Vink: $2n\theta/\hat{\theta} \sim \chi_{2n}^2$.) Kva er den realiserte numeriske verdien av intervallet dersom $n = 10$, $\hat{\theta} = 3,23$ og $\alpha = 0,05$?

Oppgåve 3

Finn testen med nivå α som har uniformt størst styrke for å teste $H_0: \theta \leq \theta_0$ mot $H_1: \theta > \theta_0$. For kva verdier av $\hat{\theta}$ vil H_0 forkastast dersom $\theta_0 = 3$, $n = 10$ og $\alpha = 0,05$?