



Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4265 Stokastiske prosessar

Mondag 9. august 2010 kl. 9–13

Hjelpemiddel: Gult A5-ark med eigne handskrivne notat (stempla av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 30. august 2010

I vurderinga tel kvart bokstavpunkt likt.

I tillegg til avsluttande eksamen tel prosjektoppgåve med 20 %.

Alle svara skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller døme frå pensum).

På side 2–3 er det oppgåver, på side 4–6 er det ei formelsamling.

Oppgave 1

Ein fabrikk teiknar kvart år ein avtale for eit visst produkt med éin av tre underleverandørar. Sekvensen av valte underleverandørar følgjer ei markovkjede på tilstandsrommet $\{1, 2, 3\}$ med overgangsmatrise

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- a) Finn $P(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$ og $P(X_2 \neq 3, X_1 \neq 3 \mid X_0 = 2)$.

La T vere talet på år til underleverandør 3 blir valt, det vil seie $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 3\}$.

- b) Finn dei vilkårsbundne (betinga) forventningsverdiane $E(T \mid X_0 = i)$, $i = 1, 2, 3$.
- c) Grunngi kvifor grensefordelinga for den gitte markovkjeda eksisterer. Finn grensefordelinga.
- d) Kva er sannsynet i det lange løpet for at same underleverandøren blir vald to år på rad?

Oppgave 2

La $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ vere ein forgreiningsprosess, der X_n er talet på individ i generasjon n . Vi går ut frå at alle individa gir opphav til nye avkom uavhengig av kvarandre og med same sannsynlighetsfordelinga. La Z vere talet på avkom til eit vilkårleg individ. Sannsynsfordelinga til Z er gitt ved $P(Z = j) = (1 - p)^j p$, $j = 0, 1, \dots$, der p er ein parameter, $0 < p < 1$. Forventningsverdien til Z er $EZ = (1 - p)/p$.

Anta at $X_0 = 1$. La π_0 vere sannsynet for at populasjonen til slutt døy ut. Vis ved å se på vilkårsbundne sannsyn gitt X_1 (betinge på X_1) at $\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P(Z = j)$. Kva er sannsynet for at populasjonen døy ut for ulike verdier av p ?

Oppgåve 3

Kvinner og menn kj m til ein butikk som to uavhengige poissonprosessar med intensitet $\lambda_k = 0,25$ pr. minutt for kvinner og $\lambda_m = 0,2$ pr. minutt for menn. Butikken er tom for kundar ved tid 0.

- a) Kva er sannsynet for at første kunden er ei kvinne? Kva er sannsynet for at det minst er to kvinner blant dei fire første kundane som kj m til butikken?

La $N(t)$ vere talet på kundar totalt (kvinner og menn) som har kome til butikken ved tid t .

- b) Kva er sannsynsfordelinga til $N(t)$? Finn sannsynet for at det minst kj m fire kundar i løpet av 8 minutt. Kva er det vilkårsbundne (betinga) sannsynet for at det minst kj m fire kunder i løpet av 8 minutt gitt at $N(4) = 2$?

La Y vere talet på kundar som kj m til butikken i løpet av ei tid T , der T er eksponentielt fordelt med rate μ (dvs. med forventningsverdi $1/\mu$).

- c) Finn $P(Y = 0)$ og $P(Y = 1)$ uttrykt ved μ og $\lambda = \lambda_k + \lambda_m$. Kva blir den generelle sannsynsfordelinga til Y ?

Tida kvinner er i butikken f r dei går ut att er uavhengige og eksponentielt fordelte med rate $\mu_k = 0,4$ pr. minutt. La $X_k(t)$ vere talet på kvinner i butikken ved tid t .

- d) Grunngi kvifor $X_k(t)$ er ein fødsels- og dødsprosess, og angi fødsels- og d dsratane for denne prosessen. Kva er forventa tid til første gongen det er to kvinner i butikken?

Tida menn er i butikken f r dei går ut er uavhengige (også av tida kvinnene bruker i butikken) og eksponentielt fordelte med rate $\mu_m = 0,5$ pr. minutt.

Anta no at butikken har plass til maksimalt to kundar. Dersom det er to kundar i butikken, vil andre potensielle kundar gå vidare.

- e) Kva er forventa tid til første gongen det er to kundar i butikken?

Formelsamling

Setningene om total sannsynlighet og dobbeltforventning

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C), \quad E(X \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

For en irreducibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ og er gitt av likningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å komme til tilstand j gitt start i tilstand i

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n te hendelse (n th arrival time), S_n , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

En markovprosess $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, med tilstandsrom $\Omega \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$, kalles en fødsels- og dødsprosess dersom

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i+1 \mid X(t) = i) &= \lambda_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i-1 \mid X(t) = i) &= \mu_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \\ P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= o(h) \quad \text{når } |j-i| \geq 2, \end{aligned}$$

der $i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ er fødselsrater og $\mu_i \geq 0$ er dødsrater.

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Kolmogorovs bakover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Hvis $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ eksisterer og er uavhengige av i , er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots,$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

Køteori

La L være gjennomsnittlig antall kunder, L_Q gjennomsnittlig antall kunder i kø, W gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W_Q gjennomsnittlig tid pr. kunde i kø, W_Q^* tid i kø, S betjeningstid, V gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet og λ_a gjennomsnittlig ankomstrate. Da gjelder

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q, \quad V = \lambda_a E(SW_Q^*) + \lambda_a ES^2/2.$$

Noen rekker

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

En førsteordens lineær differensiallikning

Differensiallikningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds.$$