



Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4265 Stokastiske prosessar

Onsdag 2. desember 2008 kl. 9–13

Hjelpemiddel: Gult A5-ark med egne handskrivne notat (stempla av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 23. desember 2009

I vurderinga tel kvart bokstavpunkt likt.

I tillegg til avsluttande eksamen tel prosjektoppgåve med 20 %.

Alle svara skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller eksempel frå pensum).

På side 2–3 er det oppgåver, på side 4–6 er det ei formelsamling.

Oppgåve 1

Anne og Bob speler eit spel som består av fleire rundar. Anta at Anne har sannsyn α og Bob har sannsyn $1 - \alpha$ for å vinne ein runde, $0 < \alpha < 1$, og at sigrane er uavhengige frå runde til runde. Vi ønskjer å halde reknskap med talet på singlar på rad og med kven som vann siste runden ved å modellere spelet ved ei markovkjede i diskret tid med tilstandar $\pm 1, \pm 2, \dots$, der $X_n = i > 0$ tyder at Anne har vunne dei siste i rundane, og $X_n = i < 0$ tyder at Bob har vunne dei siste $-i$ rundane, der n er det totale talet på rundar spelt.

Overgangssannsyna er $P_{i,i+1} = \alpha$, $P_{i,-1} = 1 - \alpha$, $P_{-i,-i-1} = 1 - \alpha$ and $P_{-i,1} = \alpha$ for alle $i \geq 1$, og alle andre overgangssannsyn er lik null.

I (a) og (b) antar vi at $\alpha = \frac{1}{2}$.

- a) Finn $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 1)$ og $P(X_5 = 2 \mid X_1 = 1)$. Dersom Anne vinn første runden, kva er sannsynet for at ho nokon gong i løpet av dei første fem rundane vinn to rundar på rad?
- b) Finn forventa tal på rundar som har blitt spelt når første spelar oppnår tre singlar på rad. Dersom Anne vinn første runden, kva er sannsynet for at Anne er den første til å få tre singlar på rad?

I (c) og (d) kan α vere kva som helst tal mellom 0 og 1.

- c) Anta at Anne og Bob speler mange rundar. Kva er delane av tida i det lange løpet som markovkjeda er i tilstand i , $i = \pm 1, \pm 2, \dots$? Kan desse delane tolkast som grense-sannsyn?
- d) Finn sannsynet for at Anne blir første spelaren som får n singlar på rad.

Oppgåve 2

Kvar gong ein maskin går sund blir den sendt til hurtigreparasjon med sannsyn α eller til grundig reparasjon med sannsyn $1 - \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Hurtigreparasjon går fortare, men med sannsyn $1 - \beta$ blir det oppdaga under hurtigreparasjon at maskinen må gjennom grundig reparasjon.

Vi modellerer statusen til maskinen ved ei markovkjede i kontinuerleg tid med tre tilstandar, der tilstand 0 tyder at maskinen verkar, tilstand 1 tyder at han gjennomgår hurtigreparasjon og tilstand 2 at han gjennomgår grundig reparasjon. Anta at tida prosessen er i ein tilstand før det skjer ein overgang til ein annan tilstand er eksponentielt fordelt med forventningsverdi $1/\lambda$ for tilstand 0, $1/\mu_1$ for tilstand 1 og $1/\mu_2$ for tilstand 2, der $\mu_1 > \mu_2$. Overgangssannsyna P_{ij} frå tilstand i til tilstand j er gitt ved $P_{01} = \alpha$, $P_{02} = 1 - \alpha$, $P_{10} = \beta$, $P_{12} = 1 - \beta$ og $P_{20} = 1$.

- Kva er dei augneblinklege overgangsratane q_{ij} (frå tilstand i til tilstand j)?
- Vis at delen av tida maskinen verkar i det lange løpet er

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_2} \left(1 + \alpha \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \beta \right) \right)}.$$

Anta at $\lambda = 1/10$, $\mu_1 = 1$ og $\mu_2 = 1/2$ (pr. døgn). Finn P_0 uttrykt ved α når (i) $\beta = 1/2$ og (ii) $\beta = 3/5$.

- Formuler ein regel, uttrykt ved generell λ , μ_1 , μ_2 og β , for korleis α skal veljast for å maksimere P_0 .

Oppgåve 3

Kundar kjem til ein kø med éi beteningseining i samsvar med ein poissonprosess med intensitet 2 (pr. minutt) (eit $M/G/1$ -system). Beteningstidene er uavhengige og identisk fordelte med forventningsverdi α (minutt) og varians β (min^2). Finn W_Q , gjennomsnittleg tid ein kunde står i kø (uttrykt ved α og β).

Kostnaden ved å drive beteningseininga er $2/\alpha$ kr pr. minutt (uansett om det er ein kunde i beteningseininga eller ikkje), og kostnaden ved å ha ein kunde i kø er 1 kr pr. minutt (for kvar kunde i køen). Kva er total gjennomsnittleg kostnad pr. minutt for dette systemet? Anta at $\alpha = 1/3$. For kva verdiar av β vil ein auke av α redusere gjennomsnittskostnaden?

Formelsamling

Setningane om totalt sannsyn og dobbeltforventning

La $B_1, B_2, \dots$ vere parvis disjunkte hendingar med $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Då gjeld

$$P(A \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C), \quad E(X \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov-likningane:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

For ei irreducibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ og er gitte av likningane

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstandar i, j og k er forventa tid i tilstand j gitt start i tilstand i

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstandar i og j er sannsynet for ein eller annan gong å kome til tilstand j gitt start i tilstand i

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n te hendinga (n th arrival time), S_n , har sannsynstettleik

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at talet på hendingar $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantettleik

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Ein markovprosess $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, med tilstandsrom $\Omega \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$, blir kalla ein fødsels- og dødsprosess dersom

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i+1 \mid X(t) = i) &= \lambda_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i-1 \mid X(t) = i) &= \mu_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \\ P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= o(h) \quad \text{når } |j-i| \geq 2, \end{aligned}$$

der $i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ er fødselsratar og $\mu_i \geq 0$ er dødsratar.

Chapman-Kolmogorov-likningane:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs framover-likningar:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Kolmogorovs bakover-likningar:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Dersom $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ eksisterer og er uavhengige av i , er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots,$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

Køteori

La L vere gjennomsnittleg tal på kundar, L_Q gjennomsnittleg tal på kundar i kø, W gjennomsnittleg tid pr. kunde i systemet, W_Q gjennomsnittleg tid pr. kunde i kø, W_Q^* tid i kø, S beteningstid, V gjennomsnittleg attverande arbeid i systemet og λ_a gjennomsnittleg innkomsrate. Då gjeld

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q, \quad V = \lambda_a E(SW_Q^*) + \lambda_a E S^2 / 2.$$

Nokre rekkjer

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

Ei førsteordens lineær differensiallikning

Differensiallikninga $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ med initialvilkår $f(0) = a$ har løysing

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds.$$