



*Bokmål*

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke  
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4265 Stokastiske prosesser

Mandag 9. august 2010 kl. 9–13

Hjelpemidler: Gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 30. august 2010

I vurderingen teller hvert bokstavpunkt likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller prosjektoppgave med 20 %.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

På side 2–3 er det oppgaver, på side 4–6 er det en formelsamling.

**Oppgave 1**

En fabrikk tegner hvert år en avtale for et visst produkt med én av tre underleverandører. Sekvensen av valgte underleverandører følger en markovkjede på tilstandsrommet  $\{1, 2, 3\}$  med overgangsmatrise

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- a) Finn  $P(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$  og  $P(X_2 \neq 3, X_1 \neq 3 \mid X_0 = 2)$ .

La  $T$  være antall år til underleverandør 3 blir valgt, det vil si  $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ .

- b) Finn de betingede forventningsverdiene  $E(T \mid X_0 = i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
- c) Begrunn hvorfor grensefordelingen for den gitte markovkjeden eksisterer. Finn grensefordelingen.
- d) Hva er sannsynligheten i det lange løp for at samme underleverandør velges to år på rad?

**Oppgave 2**

La  $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$  være en forgreiningssprosess, der  $X_n$  er antall individer i generasjon  $n$ . Vi antar at alle individer gir opphav til nye avkom uavhengig av hverandre og med samme sannsynlighetsfordeling. La  $Z$  være antall avkom til et vilkårlig individ. Sannsynlighetsfordelingen til  $Z$  er gitt ved  $P(Z = j) = (1 - p)^j p$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , der  $p$  er en parameter,  $0 < p < 1$ . Forventningsverdien til  $Z$  er  $EZ = (1 - p)/p$ .

Anta at  $X_0 = 1$ . La  $\pi_0$  være sannsynligheten for at populasjonen til slutt dør ut. Vis ved å betinge på  $X_1$  at  $\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P(Z = j)$ . Hva er sannsynligheten for at populasjonen dør ut for ulike verdier av  $p$ ?

**Oppgave 3**

Kvinner og menn ankommer en butikk som to uavhengige poissonprosesser med intensitet  $\lambda_k = 0,25$  pr. minutt for kvinner og  $\lambda_m = 0,2$  pr. minutt for menn. Butikken er tom for kunder ved tid 0.

- a) Hva er sannsynligheten for at første kunde er en kvinne? Hva er sannsynligheten for at det minst er to kvinner blant de fire første kundene som ankommer butikken?

La  $N(t)$  være antall kunder totalt (kvinner og menn) som har ankommet butikken ved tid  $t$ .

- b) Hva er sannsynlighetsfordelingen til  $N(t)$ ? Finn sannsynligheten for at det minst kommer fire kunder i løpet av 8 minutter. Hva er den betingede sannsynligheten for at det minst kommer fire kunder i løpet av 8 minutter gitt at  $N(4) = 2$ ?

La  $Y$  være antall kunder som ankommer butikken i løpet av en tid  $T$ , der  $T$  er eksponentielt fordelt med rate  $\mu$  (dvs. med forventningsverdi  $1/\mu$ ).

- c) Finn  $P(Y = 0)$  og  $P(Y = 1)$  uttrykt ved  $\mu$  og  $\lambda = \lambda_k + \lambda_m$ . Hva blir den generelle sannsynlighetsfordelingen til  $Y$ ?

Tida kvinner tilbringer i butikken før de går ut igjen er uavhengige og eksponentielt fordelte med rate  $\mu_k = 0,4$  pr. minutt. La  $X_k(t)$  være antall kvinner i butikken ved tid  $t$ .

- d) Begrunn hvorfor  $X_k(t)$  er en fødsels- og dødsprosess, og angi fødsels- og dødsratene for denne prosessen. Hva er forventet tid til det første gang er to kvinner i butikken?

Tida menn tilbringer i butikken før de går ut antas å være uavhengige (også av kvinnes tid i butikken) og eksponentielt fordelte med rate  $\mu_m = 0,5$  pr. minutt.

Anta nå at butikken har plass til maksimalt to kunder. Hvis det er to kunder i butikken, vil andre potensielle kunder gå videre.

- e) Hva er forventet tid til det første gang er to kunder i butikken?

## Formelsamling

### Setningene om total sannsynlighet og dobbeltforventning

La  $B_1, B_2, \dots$  være parvis disjunkte hendelser med  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$ . Da gjelder

$$P(A \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C), \quad E(X \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C).$$

### Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

For en irreducibel og ergodisk markovkjede eksisterer  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$  og er gitt av likningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander  $i, j$  og  $k$  er forventet tid i tilstand  $j$  gitt start i tilstand  $i$

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander  $i$  og  $j$  er sannsynligheten for en eller annen gang å komme til tilstand  $j$  gitt start i tilstand  $i$

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

### Poissonprosess

Ventetid til  $n$ te hendelse ( $n$ th arrival time),  $S_n$ , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser  $N(t) = n$ , så har  $S_1, S_2, \dots, S_n$  simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

## Markovprosesser i kontinuerlig tid

En markovprosess  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ , med tilstandsrom  $\Omega \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ , kalles en fødsels- og dødsprosess dersom

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i+1 \mid X(t) = i) &= \lambda_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i-1 \mid X(t) = i) &= \mu_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \\ P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= o(h) \quad \text{når } |j-i| \geq 2, \end{aligned}$$

der  $i \geq 0$ ,  $\lambda_i \geq 0$  er fødselsrater og  $\mu_i \geq 0$  er dødsrater.

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Kolmogorovs bakover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Hvis  $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$  eksisterer og er uavhengige av  $i$ , er  $P_j$  gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots,$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

**Køteori**

La  $L$  være gjennomsnittlig antall kunder,  $L_Q$  gjennomsnittlig antall kunder i kø,  $W$  gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet,  $W_Q$  gjennomsnittlig tid pr. kunde i kø,  $W_Q^*$  tid i kø,  $S$  betjeningstid,  $V$  gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet og  $\lambda_a$  gjennomsnittlig ankomstrate. Da gjelder

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q, \quad V = \lambda_a E(SW_Q^*) + \lambda_a E S^2 / 2.$$

**Noen rekker**

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

**En førsteordens lineær differensiallikning**

Differensiallikningen  $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$  med initialbetingelse  $f(0) = a$  har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds.$$