



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4265 Stokastiske prosesser

Onsdag 2. desember 2009 kl. 9–13

Hjelpemidler: Gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formel i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 23. desember 2009

I vurderingen teller hvert bokstavpunkt likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller prosjektoppgave med 20 %.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

På side 2–3 er det oppgaver, på side 4–6 er det en formelsamling.

Oppgave 1

Anne og Bob spiller et spill som består av flere runder. Anta at Anne har sannsynlighet α og Bob har sannsynlighet $1 - \alpha$ for å vinne en runde, $0 < \alpha < 1$, og at seirene er uavhengig fra runde til runde. Vi ønsker å holde regnskap med antall seire på rad og med hvem som vant siste runde ved å modellere spillet ved en markovkjede i diskret tid med tilstander $\pm 1, \pm 2, \dots$, der $X_n = i > 0$ betyr at Anne har vunnet de siste i rundene, og $X_n = i < 0$ betyr at Bob har vunnet de siste $-i$ rundene, der n er det totale antallet runder spilt.

Overgangssannsynlighetene er $P_{i,i+1} = \alpha$, $P_{i,-1} = 1 - \alpha$, $P_{-i,-i-1} = 1 - \alpha$ and $P_{-i,1} = \alpha$ for alle $i \geq 1$, og alle andre overgangssannsynligheter er lik null.

I (a) og (b) antar vi at $\alpha = \frac{1}{2}$.

- a) Finn $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 1)$ og $P(X_5 = 2 \mid X_1 = 1)$. Hvis Anne vinner første runde, hva er sannsynligheten for at hun noen gang i løpet av de første fem rundene vinner to runder på rad?
- b) Finn forventet antall runder som har blitt spilt når første spiller oppnår tre seire på rad. Hvis Anne vinner første runde, hva er sannsynligheten for at Anne er den første til å få tre seire på rad?

I (c) og (d) kan α være et hvilket som helst tall mellom 0 og 1.

- c) Anta at Anne og Bob spiller mange runder. Hva er andelene av tida i det lange løp som markovkjeden er i tilstand i , $i = \pm 1, \pm 2, \dots$? Kan disse andelene tolkes som grensesannsynligheter?
- d) Finn sannsynligheten for at Anne blir første spiller som får n seire på rad.

Oppgave 2

Hver gang en maskin går i stykker blir den sendt til hurtigreparasjon med sannsynlighet α eller til grundig reparasjon med sannsynlighet $1 - \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Hurtigreparasjon går forttere, men med sannsynlighet $1 - \beta$ oppdages det under hurtigreparasjon at maskinen må gjennom grundig reparasjon.

Vi modellerer statusen til maskinen ved en markovkjede i kontinuerlig tid med tre tilstander, der tilstand 0 betyr at maskinen virker, tilstand 1 betyr at den gjennomgår hurtigreparasjon og tilstand 2 at den gjennomgår grundig reparasjon. Anta at tida prosessen tilbringer i en tilstand før det skjer en overgang til en annen tilstand er eksponentielt fordelt med forventningsverdi $1/\lambda$ for tilstand 0, $1/\mu_1$ for tilstand 1 og $1/\mu_2$ for tilstand 2, der $\mu_1 > \mu_2$. Overgangssannsynlighetene P_{ij} fra tilstand i til tilstand j er gitt ved $P_{01} = \alpha$, $P_{02} = 1 - \alpha$, $P_{10} = \beta$, $P_{12} = 1 - \beta$ og $P_{20} = 1$.

- a) Hva er de øyeblikkelige overgangsratene q_{ij} (fra tilstand i til tilstand j)?
- b) Vis at andelen av tida maskinen virker i det lange løp er

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_2} \left(1 + \alpha \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \beta \right) \right)}.$$

Anta at $\lambda = 1/10$, $\mu_1 = 1$ og $\mu_2 = 1/2$ (pr. døgn). Finn P_0 uttrykt ved α når (i) $\beta = 1/2$ og (ii) $\beta = 3/5$.

- c) Formuler en regel, uttrykt ved generell λ , μ_1 , μ_2 og β , for hvordan α skal velges for å maksimere P_0 .

Oppgave 3

Kunder ankommer en kø med én betjeningsenhet i henhold til en poissonprosess med intensitet 2 (pr. minutt) (et $M/G/1$ -system). Betjeningstidene er uavhengige og identisk fordelte med forventningsverdi α (minutter) og varians β (min^2). Finn W_Q , gjennomsnittlig tid en kunde står i kø (uttrykt ved α og β).

Kostnaden ved å drive betjeningsenheten er $2/\alpha$ kr pr. minutt (uansett om det er en kunde i betjeningsenheten eller ikke), og kostnaden ved å ha en kunde i kø er 1 kr pr. minutt (for hver kunde i køen). Hva er total gjennomsnittlig kostnad pr. minutt for dette systemet? Anta at $\alpha = 1/3$. For hvilke verdier av β vil en økning av α redusere gjennomsnittskostnaden?

Formelsamling

Setningene om total sannsynlighet og dobbeltforventning

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C), \quad E(X \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

For en irreducibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ og er gitt av likningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å komme til tilstand j gitt start i tilstand i

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n te hendelse (n th arrival time), S_n , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

En markovprosess $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, med tilstandsrom $\Omega \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$, kalles en fødsels- og dødsprosess dersom

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i+1 \mid X(t) = i) &= \lambda_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i-1 \mid X(t) = i) &= \mu_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \\ P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= o(h) \quad \text{når } |j-i| \geq 2, \end{aligned}$$

der $i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ er fødselsrater og $\mu_i \geq 0$ er dødsrater.

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Kolmogorovs bakover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Hvis $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ eksisterer og er uavhengige av i , er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots,$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

Køteori

La L være gjennomsnittlig antall kunder, L_Q gjennomsnittlig antall kunder i kø, W gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W_Q gjennomsnittlig tid pr. kunde i kø, W_Q^* tid i kø, S betjeningstid, V gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet og λ_a gjennomsnittlig ankomstrate. Da gjelder

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q, \quad V = \lambda_a E(SW_Q^*) + \lambda_a E S^2 / 2.$$

Noen rekker

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

En førsteordens lineær differensiallikning

Differensiallikningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds.$$