



Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4265 Stokastiske prosessar
ST2101 Stokastisk simulering og modellering

Tysdag 9. desember 2008 kl. 9–13

Hjelpemiddel: Gult A5-ark med eigne handskrivne notat (stempla av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 9. januar 2009

I vurderinga tel kvart bokstavpunkt likt.

TMA4265: I tillegg til avsluttande eksamen tel prosjektoppgåve med 20 %.

ST2101: I tillegg til avsluttande eksamen tel prosjektoppgåve med 50 %.

Alle svara skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller eksempel frå pensum).

På side 2–4 er det oppgåver, på side 5–7 er det ei formelsamling.

Oppgåve 1

Vi speler eit spel med fem terningar. Målet er å oppnå at alle fem terningane viser det same. I første omgangen kastar vi fem terningar. Vi sparar på terningar som viser den verdien det er flest av. Dersom terningane til dømes viser 3, 4, 4, 5, 6, sparar vi dei to firarane. Dersom det er fleire verdier som opptrer med maksimalt tal, veljer vi éin verdi vi vil spare på – dersom terningane til dømes viser 3, 3, 4, 4, 6, sparar vi anten på dei to trearane eller på dei to firarane.

I andre omgangen kastar vi dei terningane vi ikkje sparar på om att. Igjen sparar vi på terningar (blant alle fem terningane) som viser den verdien det er flest av (vi har lov å byte verdi vi sparar på – dersom vi har spart på to toarar og det nye kastet gir tre trearar, sparar vi på trearane).

Slik held vi fram til alle terningane viser det same.

Vi modellerer spelet med ei markovkjede i diskret tid, med tilstandar 0, 1, 2, 3, 4 og 5, der $X_0 = 0$ og X_i er talet på den verdien det er flest av etter i kast. Dersom til dømes terningane viser 3, 3, 4, 4, 6 etter fire kast, er $X_4 = 2$, og dersom dei viser 3, 4, 4, 4, 6 etter fem kast, er $X_5 = 3$.

Overgangsmatrisa for markovkjeda er

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{54} & \frac{25}{36} & \frac{125}{648} & \frac{25}{1296} & \frac{1}{1296} \\ 0 & \frac{5}{54} & \frac{25}{36} & \frac{125}{648} & \frac{25}{1296} & \frac{1}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{10}{27} & \frac{5}{72} & \frac{1}{216} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det blir oppgitt at

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{25}{2916} & \frac{875}{1944} & \frac{28625}{69984} & \frac{8375}{69984} & \frac{221}{17496} \\ 0 & \frac{25}{2916} & \frac{875}{1944} & \frac{28625}{69984} & \frac{8375}{69984} & \frac{221}{17496} \\ 0 & 0 & \frac{25}{81} & \frac{25}{54} & \frac{775}{3888} & \frac{113}{3888} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{625}{1296} & \frac{275}{648} & \frac{121}{1296} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{125}{157464} & \frac{26875}{104976} & \frac{3419375}{7558272} & \frac{115625}{472392} & \frac{347897}{7558272} \\ 0 & \frac{125}{157464} & \frac{26875}{104976} & \frac{3419375}{7558272} & \frac{115625}{472392} & \frac{347897}{7558272} \\ 0 & 0 & \frac{125}{729} & \frac{7625}{17496} & \frac{7375}{23328} & \frac{5359}{69984} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15625}{46656} & \frac{11375}{23328} & \frac{8281}{46656} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{125}{216} & \frac{91}{216} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og at

$$(I - P_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{49} & \frac{675}{392} & \frac{1500}{539} & \frac{94575}{17248} \\ 0 & \frac{54}{49} & \frac{675}{392} & \frac{1500}{539} & \frac{94575}{17248} \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{30}{11} & \frac{965}{176} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{36}{11} & \frac{60}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

der P_T er matrisa vi får ved å fjerne siste raden og siste søyla frå P , og I er identitetsmatrisa av storleik 5.

- a) Vis korleis overgangssannsyna $P_{05} = 1/1296$ og $P_{34} = 5/18$ er rekna ut.

Kva ekvivalensklassar har kjeda? Kva ekvivalensklassar er transiente og kva er rekurrente?

- b) Kva er sannsynet for å få fem like verdier på terningane etter tre eller færre kast (dette svarar til å løysje ei av oppgåvene i terningspelet *yatzzy*)?

Kva er sannsynet for å få fem like verdier på terningane etter tre eller færre kast gitt at du sparar to like verdier etter første kastet?

- c) Kva er forventa tal på kast for å få fem like verdier på terningane?

Kva er forventa tal på nye kast som trengst for å få fem like verdier dersom du allereie har spart fire like verdier, og kva er forventa tal på nye kast som trengst dersom du har spart tre like verdier?

- d) Kva er sannsynligheten for at det i løpet av spelet kjem ein omgang der alle terningane har ulike verdier? Kva er sannsynet for at det i løpet av spelet kjem ein omgang der nøyaktig tre av terningane har samme verdi?

Oppgåve 2

Vi antar at ein dyrepopulasjon utviklar seg som ein fødsels- og dødsprosess med fødselsratar $\lambda_n = n\lambda$ for $n \geq 0$ og dødsratar $\mu_n = n\mu$ for $n \geq 1$. Anta at $\lambda > \mu > 0$. La $X(t)$ vere populasjonsstorleiken ved tid t .

- a) Kva er overgangsratane v_i (frå tilstand i til ny tilstand), overgangssannsyna P_{ij} og dei augneblinklelege overgangsratane q_{ij} (frå tilstand i til tilstand j)? Har prosessen nokon absorberande tilstandar?

Vi skal finne sannsynet for at ein populasjon som startar med x_0 dyr ved tid 0 dør ut.

La Y_n vere markovkjeda i diskret tid som er definert ved at $Y_0 = X(0)$ og Y_n er tilstanden til $X(t)$ etter n te overgangen.

- b) Kva er overgangssannsyna for markovkjeda Y_n ? Korleis kan utdøying av populasjonen uttrykkjast ved hjelp av denne prosessen, og kva blir sannsynet for at ein populasjon som startar med x_0 dyr dør ut?

Vink: I ei markovkjede med overgangssannsyn $P_{00} = 1$, $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$ for alle $i \geq 1$, dvs. *Gambler's ruin* mot ein uendeleg rik motstandar, er sannsynet $((1-p)/p)^i$ for at prosessen nokon gong når tilstand 0 gitt at den startar i tilstand i dersom $p > 1/2$.

I ein populasjon som følgjer denne fødsels- og dødsprosessen og som har x_0 dyr ved tid 0, er $x_0 e^{(\lambda-\mu)t}$ forventa tal på dyr ved tid t (jamfør eksemplet med lineær vekst med immigrasjon, men med immigrasjonsraten sett lik null).

Vi ønskjer å modellere moglegheiten for katastrofe som utslettar heile populasjonen, og antek no at dyrepopulasjonen følgjer ei markovkjede i kontinuerlig tid med augneblinklelege overgangsratar $q_{n,n+1} = n\lambda$ for $n \geq 0$, $q_{n,n-1} = n\nu$ og $q_{n0} = \kappa$ for $n \geq 2$, og $q_{10} = \nu + \kappa$, der $\nu > 0$ og $\kappa > 0$. Dei andre overgangsratane er 0.

- c) Er dette ein fødsels- og dødsprosess? Kva er sannsynet for utdøying med denne modellen?
- d) Utlei ei differensiallikning for forventa tal på dyr i populasjonen ved tid t og løys denne. Skisser grafen når $\lambda > \nu + \kappa$.

Kva er samanhengen med forventa tal på dyr i ein populasjon som følgjer fødsels- og dødsprosessen frå (a) og (b) dersom $\nu + \kappa = \mu$? Samanlikn òg sannsynet for utdøying, og kommenter resultatet.

Formelsamling

Setningane om totalt sannsyn og dobbeltforventning

La $B_1, B_2, \dots$ vere parvis disjunkte hendingar med $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Då gjeld

$$P(A \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C), \quad E(X \mid C) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X \mid B_i \cap C)P(B_i \mid C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov-likningane:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

For ei irreducibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ og er gitte av likningane

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstandar i, j og k er forventa tid i tilstand j gitt start i tilstand i

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstandar i og j er sannsynet for ein eller annan gong å kome til tilstand j gitt start i tilstand i

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n te hendinga (n th arrival time), S_n , har sannsynstettleik

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at talet på hendingar $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantettleik

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

Ein markovprosess $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, med tilstandsrom $\Omega \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$, blir kalla ein fødsels- og dødsprosess dersom

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i+1 \mid X(t) = i) &= \lambda_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i-1 \mid X(t) = i) &= \mu_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \\ P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= o(h) \quad \text{når } |j-i| \geq 2, \end{aligned}$$

der $i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ er fødselsratar og $\mu_i \geq 0$ er dødsratar.

Chapman-Kolmogorov-likningane:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs framover-likningar:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Kolmogorovs bakover-likningar:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Dersom $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ eksisterer og er uavhengige av i , er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots,$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

Køteori

La L vere gjennomsnittleg tal på kundar, L_Q gjennomsnittleg tal på kundar i kø, W gjennomsnittleg tid pr. kunde i systemet, W_Q gjennomsnittleg tid pr. kunde i kø, W_Q^* tid i kø, S beteningstid, V gjennomsnittleg attverande arbeid i systemet og λ_a gjennomsnittleg innkomstrate. Då gjeld

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q, \quad V = \lambda_a E(SW_Q^*) + \lambda_a E S^2 / 2.$$

Nokre rekkjer

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

Ei førsteordens lineær differensiallikning

Differensiallikninga $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ med initialvilkår $f(0) = a$ har løysing

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds.$$