



TMA4265 Stokastiske
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag
Prosesser

Løsningsforslag - Øving 2

Oppgaver fra læreboka

3.30

- La $X_0, X_1, \dots$ u.i.f der $P(X_i = j) = p(j)$, med $\sum_{j=1}^m p(j) = 1$
- La $N = \min\{N > 0 : X_n = X_0\}$

Har at

$$\begin{aligned} P(N > n) &= P\{X_1 \neq X_0, X_2 \neq X_0, \dots, X_n \neq X_0\} \\ &= \sum_{j=1}^m P\{X_1 \neq X_0, X_2 \neq X_0, \dots, X_n \neq X_0 \mid X_0 = j\} \cdot P(X_0 = j) \\ &= \sum_{j=1}^m (1 - p(j))^n \cdot p(j) \\ &\Downarrow \\ E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m (1 - p(j))^n p(j) \\ &= \sum_{j=1}^m p(j) \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p(j))^n \\ &= \sum_{j=1}^m p(j) \cdot \frac{1}{p(j)} = \underline{\underline{m}} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad x < 1$$

Alternativ, kortere løsning:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{j=1}^m E[N | X_0 = j] \cdot p(j) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{p(j)} \cdot p(j) = \underline{\underline{m}} \end{aligned}$$

3.37

La antall feil X gitt at skriver nr $T = A, B, C$ skriver være Poissonfordelt med

$$X|T = A \sim \text{Poisson}(2.6)$$

$$X|T = B \sim \text{Poisson}(3.0)$$

$$X|T = C \sim \text{Poisson}(3.4)$$

Ved Poissonfordelingen vet vi dermed at

$$E[X|T = A] = \text{Var}(X|T = A) = 2.6$$

$$E[X|T = B] = \text{Var}(X|T = B) = 3.0$$

$$E[X|T = C] = \text{Var}(X|T = C) = 3.4$$

Hver av skriverene gjør jobben med lik sannsynlighet, dvs at

$$P(T = A) = P(T = B) = P(T = C) = \frac{1}{3}.$$

a)

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_t E[X|T = t] P(T = t) \\ &= E[X|T = A] P(T = A) + E[X|T = B] P(T = B) + E[X|T = C] P(T = C) \\ &= 2.6 \cdot \frac{1}{3} + 3.0 \cdot \frac{1}{3} + 3.4 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

b) Vi bruker sammenhengen

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

der

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_t E[X^2|T=t] P(T=t) \\
 &= E[X^2|T=A] P(T=A) + E[X^2|T=B] P(T=B) + E[X^2|T=C] P(T=C) \\
 &= (\text{Var}(X|T=A) + E[X|T=A]^2) P(T=A) \\
 &\quad + (\text{Var}(X|T=B) + E[X|T=B]^2) P(T=B) \\
 &\quad + (\text{Var}(X|T=C) + E[X|T=C]^2) P(T=C) \\
 &= (2.6 + 2.6^2 + 3.0 + 3.0^2 + 3.4 + 3.4^2) \frac{1}{3} \\
 &= 12.11
 \end{aligned}$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= 12.11 - 3^2 \\
 &= \underline{\underline{3.11}}
 \end{aligned}$$

3.38

U er uniformfordelt på intervallet $[0,1]$. Da er $E(U) = \frac{1}{2}$ og $\text{Var}(U) = \frac{1}{12}$

Vi utfører n forsøk, der sannsynligheten for suksess er avhengig av verdien U tar. La X være antall suksesser på de n forsøkene. Betinget på $U = u$ vil X være binomisk fordelt med parameter $p = u$, altså $X|U = u \sim \text{bin}(x; n, u)$. Dette gir $E(X|U) = nU$ og $\text{Var}(X|U) = nU(1 - U)$.

Vi skal finne forventningen til antall suksesser,

$$E(X) = E(E(X|U)) = E(nU) = nE(U) = \underline{\underline{\frac{n}{2}}}$$

og variansen til antall suksesser

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(\text{Var}(X|U)) + \text{Var}(E(X|U)) \\
 &= E(nU(1 - U)) + \text{Var}(nU) \\
 &= \int_0^1 nu(1 - u)du + n^2\text{Var}(U) \\
 &= n \int_0^1 udu - n \int_0^1 u^2du + n^2 \frac{1}{12} \\
 &= \frac{n}{2} - \frac{n}{3} + \frac{n^2}{12} = \underline{\underline{\frac{n}{6} + \frac{n^2}{12}}} \tag{1}
 \end{aligned}$$

3.41

La N angi antall minutter rotten er i labyrinten. Rotten velger å gå til høyre eller venstre med lik sannsynlighet, og dersom den går til venstre velger den enten veien ut eller den kommer tilbake til utgangspunktet. Vi definerer tre valg $V = 1, 2, 3$ av vei, der

$$\begin{aligned} P(V = 1) &= P(\text{Rotten går til høyre}) = \frac{1}{2} \\ P(V = 2) &= P(\text{Rotten går til venstre, så ut}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P(V = 3) &= P(\text{Rotten går til venstre, så tilbake}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{i=1}^3 E[N|V = i] \cdot P(V = i) \\ &= (3 + E[N]) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + (5 + E[N]) \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

slik at

$$E[N] = \underline{\underline{21}}$$

4.1

Se løsningsforslag i boken.

4.2

Om det regner eller ikke i dag avhenger av været de siste tre dagene. Da været i dag kun avhenger fortiden utfra været de tre siste dagene, følger prosessen en Markovkjede. Definer

R : regn
 O : Opphold

Vi har dermed 8 mulige tilstander

$$\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, ORO, OOR, OOO\}$$

4.3

Tilstandene er definert som i oppgave 4.2. Vi har dermed overgangsmatrisen

$$P = \begin{array}{c|ccccccccc} & RRR & RRO & ROR & ORR & ROO & ORO & OOR & OOO \\ \hline RRR & 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ RRO & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ ROR & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 \\ ORR & 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ ROO & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.6 \\ ORO & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ OOR & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 \\ OOO & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$