



Oppgaver fra læreboka

3.3

Har at

$$\begin{aligned} E[X | Y = 1] &= \sum_{k=1}^3 k P(X = k | Y = 1) \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{k P(X = k, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{1}{P(Y = 1)} \sum_{k=1}^3 k p(k, 1) \\ &= \frac{\sum_{k=1}^3 k p(k, 1)}{\sum_{k=1}^3 p(k, 1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = \underline{\underline{2}} \\ E[X | Y = 2] &= \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \\ E[X | Y = 3] &= \underline{\underline{\frac{12}{5}}} \end{aligned}$$

3.8

- X - antall terningkast for å få en 6'er
- Y - antall treningkast for å få en 5'er
- Har at:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{1}{6} = p \\ P(X = 2) &= p(1 - p) \\ P(X = 3) &= p(1 - p)^2 \\ &\vdots \\ P(X = k) &= p(1 - p)^{k-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Geometrisk fordeling: $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$

a)

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{6}}$$

b) Intuitivt: $E[X | Y = 1] = E[1 + X] = 1 + E[X] = \underline{\underline{7}}$
Via fordeling: Vi har

$$\begin{aligned} P(X = 1 | Y = 1) &= 0 \\ P(X = 2 | Y = 1) &= \frac{1}{6} = p \\ P(X = 3 | Y = 1) &= (1-p)p \\ &\vdots \\ P(X = k | Y = 1) &= (1-p)^{k-2}p; \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[X | Y = 1] &= \sum_k k P(X = k | Y = 1) \\ &= 1 \cdot P(X = 1 | Y = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} k P(X = k | Y = 1) \\ &= 0 + \sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-2}p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(1-p)^{k-1}p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p + \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p \\ &= E[X] + 1 \\ &= \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

Eventuelt

$$\begin{aligned}
 E[X \mid Y = 1] &= \sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-2}p \\
 &= p \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(1-p)^k \\
 &= p \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k + 2p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\
 &= \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} + \frac{2p}{1-(1-p)} \\
 &= \frac{1-p}{p} + 2 \\
 &= \underline{\underline{7}}
 \end{aligned}$$

c) Via fordeling:

$$\begin{aligned}
 P(X = 1 \mid Y = 5) &= \frac{1}{5} \\
 P(X = 2 \mid Y = 5) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \\
 &\vdots \\
 P(X = 4 \mid Y = 5) &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} \\
 P(X = 5 \mid Y = 5) &= 0 \\
 P(X = 6 \mid Y = 5) &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \\
 &\vdots \\
 P(X = k \mid Y = 5) &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot (1-p)^{k-6} \cdot p; \quad k = 6, 7, \dots
 \end{aligned}$$

Vi får at

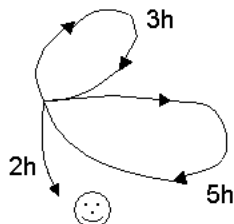
$$\begin{aligned}
 E[X \mid Y = 5] &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k \mid Y = 5) \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\
 &\quad + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \sum_{k=6}^{\infty} k(1-p)^{k-6}p \\
 \sum_{k=6}^{\infty} k(1-p)^{k-6}p &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+5)(1-p)^{k-1}p \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p + 5 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p \\
 &= E[X] + 5 \\
 &= 11 \\
 E[X \mid Y = 5] &= 1,314 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot 11 = \underline{\underline{5,82}}
 \end{aligned}$$

Vi kan eventuelt beregne

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=6}^{\infty} k(1-p)^{k-6}p &= p \sum_{k=0}^{\infty} (k+6)(1-p)^k \\
 &= p \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k + 6p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\
 &= \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} + \frac{6p}{1-(1-p)} \\
 &= \frac{1-p}{p} + 6 \\
 &= 11.
 \end{aligned}$$

3.21

- N - Antall dører valgt før han er i sikkerhet
- T_i - Gangtid ved det i 'te valget
- X - Tiden han når sikkerhet



a)

$$\underline{\underline{X = \sum_{i=1}^N T_i}}$$

b)

$$\begin{aligned} P(N=1) &= \frac{1}{3} = p \\ P(N=2) &= (1-p)p \\ P(N=3) &= (1-p)^2 p \\ &\vdots \\ P(N=k) &= (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Geometrisk fordeling: } E[N] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3}}$$

- c) – Den siste turen, tur nr N , er veien til frihet; $T_N \equiv 2 \Rightarrow E[T_N] = 2$
- d) – Observer at turene før tur nr N varer enten 3 eller 5 timer, slik at

$$E[T_i | N = n] = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = \underline{\underline{4}} \quad i < n$$

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^N T_i \mid N = n\right] &= \sum_{i=1}^n E[T_i \mid N = n] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid N = n] + E[T_N] \\ &= (n-1) \cdot 4 + 2 = \underline{\underline{4n-2}} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[E[X \mid N]] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^N T_i \mid N\right]\right] \\
&= E[4N - 2] = 4 \cdot E[N] - 2 = 4 \cdot 3 - 2 = \underline{\underline{10}}
\end{aligned}$$

3.24

- Slår mynt og krone gitt ved H og T der $P(H) = p$ og $P(T) = 1 - p$
- N - Antall kast til minst en av hver av H og T
- F_H - Antall kast til første H , der H er geometrisk: $E[F_H] = \frac{1}{p}$
- F_T - Antall kast til første T , der T er geometrisk: $E[F_T] = \frac{1}{1-p}$
- F - Utfallet av første kast

a)

$$\begin{aligned}
E[N] &= E[N \mid F = H] \cdot P(F = H) + E[N \mid F = T] \cdot P(F = T) \\
&= E[1 + F_T] \cdot p + E[1 + F_H] \cdot (1 - p) \\
&= \left(1 + \frac{1}{1-p}\right) \cdot p + \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot (1 - p) \\
&= \underline{\underline{1 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}}}
\end{aligned}$$

- b) – N_H - Antall av N som er H
 – N_T - Antall av N som er T

$$\begin{aligned}
E[N_H] &= E[N_H \mid F = H] \cdot P(F = H) + E[N_H \mid F = T] \cdot P(F = T) \\
&= (1 + E[F_T] - 1) \cdot p + 1 \cdot (1 - p) \\
&= \frac{1}{1-p} \cdot p + (1 - p) \\
&= \underline{\underline{1 - p + \frac{p}{1-p}}}
\end{aligned}$$

c) Tilsvarende som i b):

$$E[N_T] = \underline{\underline{p + \frac{1-p}{p}}}$$

(Legg merke til at dette stemmer med at $E[N_H] + E[N_T] = E[N]$)

d) M - Antall kast til minst $2H$ og $1T$

$$\begin{aligned}
 E[M] &= E[M \mid F = H] \cdot P(F = H) + E[M \mid F = T] \cdot P(F = T) \\
 &= (1 + E[N]) \cdot p + (1 + 2 \cdot E[F_H]) \cdot (1 - p) \\
 &= \left(2 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}\right) \cdot p + \left(1 + \frac{2}{p}\right) \cdot (1-p) \\
 &= \frac{p^2}{1-p} + \frac{2}{p}
 \end{aligned}$$

3.49

La A være hendelsen at A er den totale vinneren, og la X være antall spill. La Y være antall seiere for A i de to første spillene.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A|Y = 0)P(Y = 0) + P(A|Y = 1)P(Y = 1) + P(A|Y = 2)P(Y = 2) \\
 &= 0 + P(A)2p(1-p) + p^2,
 \end{aligned}$$

slik at

$$P(A) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}$$

Har tilsvarende at

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E[X|Y = 0]P(Y = 0) + E[X|Y = 1]P(Y = 1) + E[X|Y = 2]P(Y = 2) \\
 &= 2(1-p)^2 + (2 + E[X])2p(1-p) + 2p^2 \\
 &= 2 + E[X]2p(1-p),
 \end{aligned}$$

slik at

$$E[X] = \frac{2}{1 - 2p(1-p)}$$

Størst verdi får vi for $p = 0.5$:

$$E[X] = \frac{2}{1 - 0.5} = 4$$

Merk at for $p = 0$ og $p = 1$ så blir $E[X] = 2$, som forventet.

3.54

1. Trekker et av 10 kronestykker, der $n = 1, \dots, 10$. Kronestykke nr n har sannsynlighet $p = \frac{n}{10}$ for å få "Head" - H .
2. Kaster denne mynten til vi får H .

- $N =$ Antall kast for å få H når mynt nr n kastes

$$\begin{aligned}
 P(N = k) &= \sum_{n=1}^{10} P(N = k \mid \text{Mynt nr } n) \cdot P(\text{Mynt nr } n) \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \left(1 - \frac{n}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{n}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
 &\neq (1 - p)^{k-1} \cdot p \Rightarrow \text{IKKE geometrisk fordeling.}
 \end{aligned}$$

- For at N skal være en geometrisk fordelt stokastisk variabel, må alle kronestykkene ha lik sannsynlighet for å få H .