



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4265 Stokastiske prosesser
ST2101 Stokastisk simulering og modellering

Tirsdag 9. desember 2008 kl. 9–13

Hjelpemidler: Gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 9. januar 2009

I vurderingen teller hvert bokstavpunkt likt.

TMA4265: I tillegg til avsluttende eksamen teller prosjektoppgave med 20 %.

ST2101: I tillegg til avsluttende eksamen teller prosjektoppgave med 50 %.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

På side 2–4 er det oppgaver, på side 5–7 er det en formelsamling.

Oppgave 1

Vi spiller et spill med fem terninger. Målet er å oppnå at alle fem terningene viser det samme. I første omgang kaster vi fem terninger. Vi sparer på terninger som viser den verdien det er flest av. Hvis terningene for eksempel viser 3, 4, 4, 5, 6, sparer vi de to firerne. Hvis det er flere verdier som opptrer med maksimalt antall, velger vi én verdi vi vil spare på – hvis terningene for eksempel viser 3, 3, 4, 4, 6, sparer vi enten på de to treerne eller på de to firerne.

I andre omgang kaster vi de terningene vi ikke sparer på om igjen. Igjen sparer vi på terninger (blant alle fem terningene) som viser den verdien det er flest av (vi har lov å bytte verdi vi sparer på – hvis vi har spart på to toere og det nye kastet gir tre treere, sparer vi på treerne).

Slik fortsetter vi til alle terningene viser det samme.

Vi modellerer spillet med en markovkjede i diskret tid, med tilstander 0, 1, 2, 3, 4 og 5, der $X_0 = 0$ og X_i er antallet av den verdien det er flest av etter i kast. Hvis for eksempel terningene viser 3, 3, 4, 4, 6 etter fire kast, er $X_4 = 2$, og hvis de viser 3, 4, 4, 4, 6 etter fem kast, er $X_5 = 3$.

Overgangsmatrisen for markovkjeden er

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{54} & \frac{25}{36} & \frac{125}{648} & \frac{25}{1296} & \frac{1}{1296} \\ 0 & \frac{5}{54} & \frac{25}{36} & \frac{125}{648} & \frac{25}{1296} & \frac{1}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{10}{27} & \frac{5}{72} & \frac{1}{216} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det oppgis at

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{25}{2916} & \frac{875}{1944} & \frac{28625}{69984} & \frac{8375}{69984} & \frac{221}{17496} \\ 0 & \frac{25}{2916} & \frac{875}{1944} & \frac{28625}{69984} & \frac{8375}{69984} & \frac{221}{17496} \\ 0 & 0 & \frac{25}{81} & \frac{25}{54} & \frac{775}{3888} & \frac{113}{3888} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{625}{1296} & \frac{275}{648} & \frac{121}{1296} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{125}{157464} & \frac{26875}{104976} & \frac{3419375}{7558272} & \frac{115625}{472392} & \frac{347897}{7558272} \\ 0 & \frac{125}{157464} & \frac{26875}{104976} & \frac{3419375}{7558272} & \frac{115625}{472392} & \frac{347897}{7558272} \\ 0 & 0 & \frac{125}{729} & \frac{7625}{17496} & \frac{7375}{23328} & \frac{5359}{69984} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15625}{46656} & \frac{11375}{23328} & \frac{8281}{46656} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{125}{216} & \frac{91}{216} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og at

$$(I - P_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{49} & \frac{675}{392} & \frac{1500}{539} & \frac{94575}{17248} \\ 0 & \frac{54}{49} & \frac{675}{392} & \frac{1500}{539} & \frac{94575}{17248} \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{30}{11} & \frac{965}{176} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{36}{11} & \frac{60}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

der P_T er matrisen vi får ved å fjerne siste rad og siste søyle fra P , og I er identitetsmatrisen av størrelse 5.

- a) Vis hvordan overgangssannsynlighetene $P_{05} = 1/1296$ og $P_{34} = 5/18$ er regnet ut.

Hvilke ekvivalensklasser har kjeden? Hvilke ekvivalensklasser er transiente og hvilke er rekurrente?

- b) Hva er sannsynligheten for å få fem like verdier på terningene etter tre eller færre kast (dette svarer til å løse en av oppgavene i terningspillet *yatzy*)?

Hva er sannsynligheten for å få fem like verdier på terningene etter tre eller færre kast gitt at du sparer to like verdier etter første kast?

- c) Hva er forventet antall kast for å få fem like verdier på terningene?

Hva er forventet antall nye kast som trengs for å få fem like verdier hvis du allerede har spart fire like verdier, og hva er forventet antall nye kast som trengs hvis du har spart tre like verdier?

- d) Hva er sannsynligheten for at det i løpet av spillet kommer en omgang der alle terningene har forskjellige verdier? Hva er sannsynligheten for at det i løpet av spillet kommer en omgang der nøyaktig tre av terningene har samme verdi?

Oppgave 2

Vi antar at en dyrepopulasjon utvikler seg som en fødsels- og dødsprosess med fødselsrater $\lambda_n = n\lambda$ for $n \geq 0$ og dødsrater $\mu_n = n\mu$ for $n \geq 1$. Anta at $\lambda > \mu > 0$. La $X(t)$ være populasjonsstørrelsen ved tid t .

- a) Hva er overgangssatene v_i (fra tilstand i til ny tilstand), overgangssannsynlighetene P_{ij} og de øyeblikkelige overgangssatene q_{ij} (fra tilstand i til tilstand j)? Har prosessen noen absorberende tilstander?

Vi skal finne sannsynligheten for at en populasjon som starter med x_0 dyr ved tid 0 dør ut.

La Y_n være markovkjeden i diskret tid som er definert ved at $Y_0 = X(0)$ og Y_n er tilstanden til $X(t)$ etter n te overgang.

- b) Hva er overgangssannsynlighetene for markovkjeden Y_n ? Hvordan kan utdøelse av populasjonen uttrykkes ved hjelp av denne prosessen, og hva blir sannsynligheten for at en populasjon som starter med x_0 dyr dør ut?

Vink: I en markovkjede med overgangssannsynligheter $P_{00} = 1$, $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$ for alle $i \geq 1$, dvs. *Gambler's ruin* mot en uendelig rik motstander, er sannsynligheten $((1-p)/p)^i$ for at prosessen noen gang når tilstand 0 gitt at den starter i tilstand i hvis $p > 1/2$.

I en populasjon som følger denne fødsels- og dødsprosessen og som har x_0 dyr ved tid 0, er $x_0 e^{(\lambda-\mu)t}$ forventet antall dyr ved tid t (jamfør eksemplet med lineær vekst med immigrasjon, men med immigrasjonsraten satt lik null).

Vi ønsker å modellere muligheten for katastrofe som utsletter hele populasjonen, og antar nå at dyrepopulasjonen følger en markovkjede i kontinuerlig tid med øyeblikkelige overgangssatene $q_{n,n+1} = n\lambda$ for $n \geq 0$, $q_{n,n-1} = n\nu$ og $q_{n0} = \kappa$ for $n \geq 2$, og $q_{10} = \nu + \kappa$, der $\nu > 0$ og $\kappa > 0$. De andre overgangssatene er 0.

- c) Er dette en fødsels- og dødsprosess? Hva er sannsynligheten for utdøelse med denne modellen?
- d) Utled en differensiallikning for forventet antall dyr i populasjonen ved tid t og løs denne. Skisser grafen når $\lambda > \nu + \kappa$.

Hva er sammenhengen med forventet antall dyr i en populasjon som følger fødsels- og dødsprosessen fra (a) og (b) hvis $\nu + \kappa = \mu$? Sammenlikn også sannsynligheten for utdøelse, og kommenter resultatet.

Formelsamling

Setningene om total sannsynlighet og dobbeltforventning

La $B_1, B_2, \dots$ være parvis disjunkte hendelser med $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Da gjelder

$$P(A | C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A | B_i \cap C)P(B_i | C), \quad E(X | C) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X | B_i \cap C)P(B_i | C).$$

Markovkjeder i diskret tid

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

For en irreducibel og ergodisk markovkjede eksisterer $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ og er gitt av likningene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{og} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transiente tilstander i, j og k er forventet tid i tilstand j gitt start i tilstand i

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transiente tilstander i og j er sannsynligheten for en eller annen gang å komme til tilstand j gitt start i tilstand i

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

Poissonprosess

Ventetid til n te hendelse (n th arrival time), S_n , har sannsynlighetstetthet

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Gitt at antall hendelser $N(t) = n$, så har $S_1, S_2, \dots, S_n$ simultantetthet

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

Markovprosesser i kontinuerlig tid

En markovprosess $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, med tilstandsrom $\Omega \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$, kalles en fødsels- og dødsprosess dersom

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i+1 \mid X(t) = i) &= \lambda_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i-1 \mid X(t) = i) &= \mu_i h + o(h), \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \\ P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= o(h) \quad \text{når } |j-i| \geq 2, \end{aligned}$$

der $i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ er fødselsrater og $\mu_i \geq 0$ er dødsrater.

Chapman-Kolmogorov-likningene:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Kolmogorovs forover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Kolmogorovs bakover-likninger:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Hvis $P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ eksisterer og er uavhengige av i , er P_j gitt av

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{og} \quad \sum_j P_j = 1.$$

Spesielt for fødsels- og dødsprosesser:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{og} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots,$$

der

$$\theta_0 = 1 \quad \text{og} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

Køteori

La L være gjennomsnittlig antall kunder, L_Q gjennomsnittlig antall kunder i kø, W gjennomsnittlig tid pr. kunde i systemet, W_Q gjennomsnittlig tid pr. kunde i kø, W_Q^* tid i kø, S betjeningstid, V gjennomsnittlig gjenværende arbeid i systemet og λ_a gjennomsnittlig ankomstrate. Da gjelder

$$L = \lambda_a W, \quad L_Q = \lambda_a W_Q, \quad V = \lambda_a E(SW_Q^*) + \lambda_a ES^2/2.$$

Noen rekker

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

En førsteordens lineær differensiallikning

Differensiallikningen $f'(t) + \alpha f(t) = g(t)$ med initialbetingelse $f(0) = a$ har løsning

$$f(t) = a e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s) ds.$$