Eksamen ST0101, 24. mai 2006.
Løsning

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x p_x = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.4 = 1.85 \\ E(X^2) &= \sum_{x=0}^{3} x^2 p_x = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.4 = 4.75 \\ \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 4.75 - 1.85^2 = 1.33. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= p_2 + p_3 = 0.25 + 0.40 = 0.65. \\ P(X \geq 2 \mid X \geq 1) &= \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0.65}{0.80} = 0.81. \end{aligned}$$

c)

Y = antall obs. større enn eller lik 2 er binomisk(30, 0.65).

$$P(Y \geq 25) = \sum_{y=25}^{30} \binom{30}{y} 0.65^y (1-0.65)^{30-y} = 0.023.$$

Alternativt kan man si at Y er tilnærmet normalfordelt med forventning 19.5 og standardavvik 2.6125. Med kontinuitetskorreksjon får vi da

$$P(Y \geq 24.5) = P\left(Z \geq \frac{24.5 - 19.5}{2.6125}\right) = P(Z \geq 1.91) = 0.023.$$

d)

$\bar{X}$ er tilnærmet normalfordelt med forventning 1.85 og standardavvik $\sqrt{1.33/30} = 0.21$.

$$P(\bar{X} > 2.5) = P\left(Z \geq \frac{2.5 - 1.85}{0.21}\right) = P(Z \geq 3.10) = 0.001.$$

En middelverdi på 2.54 er med andre ord svært lite sannsynlig dersom dyret beveger seg tilfeldig. En slik observasjon kan da tyde på at dyret *ikke* beveger seg tilfeldig.

Oppgave 2

Hendelser og sannsynligheter oppgitt i oppgaven:

- $D =$ dopet, $P(D) = 0.001$
- $A =$ A-prøve positiv, $P(A \mid D) = 0.99$, $P(A \mid \bar{D}) = 0.01$
- $B =$ B-prøve positiv, $P(B \mid D) = 0.99$, $P(B \mid \bar{D}) = 0.01$.

a)

$$\begin{aligned} P(A \cap B \mid D) &= P(A \mid D)\, P(B \mid D) = 0.99 \cdot 0.99 = 0.9801 \\ P(A \cap B \mid \bar{D}) &= P(A \mid \bar{D})\, P(B \mid \bar{D}) = 0.01 \cdot 0.01 = 0.0001 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(D)P(A \mid D) + P(\bar{D})P(A \mid \bar{D}) \\ &= 0.001 \cdot 0.99 + 0.999 \cdot 0.01 = 0.01098 \\ P(A \cap B) &= P(D)P(A \cap B \mid D) + P(\bar{D})P(A \cap B \mid \bar{D}) \\ &= 0.001 \cdot 0.9801 + 0.999 \cdot 0.0001 = 0.00108 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(D \mid A) &= \frac{P(D)P(A \mid D)}{P(A)} = \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.01098} = 0.090 \\ P(D \mid A \cap B) &= \frac{P(D)P(A \cap B \mid D)}{P(A \cap B)} = \frac{0.001 \cdot 0.9801}{0.00108} = 0.9075 \end{aligned}$$

d)

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.00108}{0.01098} = 0.098$$

Oppgave 3

$Y = g(X) = \ln X$, $X = h(Y) = e^Y$, $h'(Y) = e^Y$.

$$f_Y(y) = f(h(y))|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\, e^y}\, e^{-\frac{(\ln e^y - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, |e^y| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Med andre ord er Y normalfordelt med forventning μ og varians σ^2.