Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Magnar Lillegård, tlf. 73 59 01 54 / 991 61 665

Eksamen i ST0101 Brukerkurs i sannsynlighetsregning

Onsdag 24. mai 2006
Tid: 09.00–13.00
Tillatte hjelpemidler: Alle trykte og skrevne. Lommeregner
Sensur: 14. juni 2006

Alle delspørsmål i oppgavesettet teller like mye.

Oppgave 1

En biolog registrerer hvor et dyr befinner seg ved hjelp av en radiosender. Hver måling er tatt med så store tidsforskjeller at målingene kan antas å være uavhengige. Han karakteriserer observasjonen (X) etter mengden skog i området, og gir verdiene 0, 1, 2 eller 3 etter en nærmere bestemt definisjon av mengden.

Ved å velge et stort antall punkter tilfeldig i området der dyret beveger seg og registrere skogmengden X kan han finne fordelingen til X i området. La $p_x = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, 3$, være fordelingen til X for slike tilfeldig valgte punkter. Han finner da at X i dette området har fordelingen $p_0 = 0.2$, $p_1 = 0.15$, $p_2 = 0.25$ og $p_3 = 0.40$.

a) Finn forventning og varians til X for tilfeldig valgte punkter.

b) Hva blir $P(X \geq 2)$? Hva blir $P(X \geq 2 \mid X \geq 1)$?

c) La nå X_i, $i = 1, 2, \ldots, 30$, være 30 uavhengige observasjoner av målinger av et bestemt individ. Vi antar at dyret beveger seg helt tilfeldig i området. Hva er sannsynligheten for at minst 25 av av observasjonene er større enn eller lik 2?

d) La $\bar{X}$ være middelverdien av de 30 målingene. Finn en tilnærmelse til fordelingen til $\bar{X}$ og bruk denne til å beregne $P(\bar{X} > 2.5)$ under forutsetning av at dyret beveger seg tilfeldig. Den observerte middelverdien for dyret viser seg å være 2.54. Hvilken konklusjon kan du trekke av denne observasjonen?

Oppgave 2

Vi antar i denne oppgaven at sannsynligheten for at en idrettsutøver i en bestemt idrettsgren har dopet seg er 0.001. En test gir positivt resultat (dvs. sier at utøveren er dopet) med sannsynlighet 0.99 dersom utøveren faktisk er dopet. Hvis utøveren ikke er dopet er testen positiv med sannsynlighet 0.01. På grunn av de relativt store usikkerhetene tar man også og analyserer en prøve nummer to, den såkalte B-prøven.

a) Resultatet av de to prøvene antas uavhengige hvis vi vet om utøveren er dopet eller ikke. Bruk dette til å finne sannsynligheten for at både A- og B-prøven er positiv hvis utøveren har dopet seg? Hva blir denne sannsynligheten hvis utøveren ikke er dopet?

b) Hva blir de ubetingede sannsynlighetene $P(A)$ og $P(A \cap B)$?

c) Hva er sannsynligheten for at utøveren er dopet hvis A-prøven er positiv? Hva er denne sannsynligheten hvis både A- og B-prøven er positiv?

d) Når A-prøven er positiv for en utøver begynner folk å diskutere hvor sannsynlig det er at B-prøven blir positiv. Hva blir svaret på dette spørsmålet?

Oppgave 3

Diameteren X til en tresort viser seg å ha fordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma^2)}, \; x > 0.$$

a) Bruk transformasjonsformelen til å finne fordelingen til $Y = \ln X$. Hva kalles denne fordelingen? Hva er forventningen og variansen til Y?