ST0101 2007V – LØSNINGSSKISSE

1a. $EX = 2\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}10 + 4\cdot 0{,}65 + 5\cdot 0{,}20 = \underline{4{,}0}$

$EX^2 = 4\cdot 0{,}05 + 9\cdot 0{,}10 + 16\cdot 0{,}65 + 25\cdot 0{,}20 = 16{,}5$, $\quad SD\,X = \sqrt{EX^2 - (EX)^2} = \sqrt{16{,}5 - 16{,}0} = \underline{0{,}707}$.

b. $P(X=5 \mid X \geq 4) = \dfrac{P(X=5 \cap X \geq 4)}{P(X \geq 4)} = \dfrac{P(X=5)}{P(X=4)+P(X=5)} = \dfrac{0{,}20}{0{,}65+0{,}20} = \underline{0{,}235}$

c. Hvis det skal være 13 unger tilsammen, er det enten to kull med 5 unger og ett med 3, eller to kull med 4 og ett med 5. La X_i = antall unger i kull i, $i = 1, 2, 3$. Vi har da 6 disjunkte muligheter for at $X_1 + X_2 + X_3 = 13$: $(X_1, X_2, X_3) = (5, 5, 3), (5, 3, 5), (3, 5, 5), (5, 4, 4), (4, 5, 4)$ eller $(4, 4, 5)$. Da X_1, X_2 og X_3 er uavhengige, er $P(X_1 = 5 \cap X_2 = 5 \cap X_3 = 3) = P(X=5)^2 \cdot P(X=3)$ osv., slik at

Rettet 31.10.2007

$P(X_1 + X_2 + X_3 = 13) = 3P(X=5)^2 \cdot P(X=3) + 3P(X=5)\cdot P(X=4)^2 = 3(0{,}2^2 \cdot 0{,}10 + 0{,}20 \cdot 0{,}65^2) = \underline{\cancel{0{,}0885}}$. 0,2655

d. La Y = antall kull som må undersøkes. Y er da geometrisk fordelt med parameter $p = 0{,}20$. $P(Y \leq 3) = 1 - (1-p)^3 = 1 - 0{,}8^3 = \underline{0{,}488}$. $EY = 1/p = 1/0{,}2 = \underline{5}$.

$P(Y \geq 10) = (1-p)^9 = 0{,}8^9 = \underline{0{,}134}$.

2a. La X = vingelengden, $X \sim N(63, 2)$. $P(X > 65) = P\left(\frac{X-63}{2} > \frac{65-63}{2}\right) = P(Z > 1)$

$= 0{,}1587$, der $Z \sim N(0,1)$.

b. La X_1 og X_2 være vingelengdene. Da er $X_1 - X_2$ normalfordelt, og

$E(X_1 - X_2) = EX_1 - EX_2 = 63 - 63 = 0$, $\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}\,X_1 + \mathrm{Var}\,X_2 = 2^2 + 2^2 = 8$,

slik at $X_1 - X_2 \sim N(0, \sqrt{8})$. $P(|X_1 - X_2| > 4) = P(X_1 - X_2 < -4 \cup X_1 - X_2 > 4)$

$= 2P(X_1 - X_2 < -4) = 2P\left(\frac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{8}} < \frac{-4-0}{\sqrt{8}}\right) = 2P(Z < -1{,}41) = 2\cdot 0{,}0793 = \underline{0{,}1586}$.

c. $P(X_1 < 65 \cup X_2 < 65) = P(\overline{X_1 \geq 65 \cap X_2 \geq 65}) = 1 - P(X_1 \geq 65)P(X_2 \geq 65)$

$= 1 - 0{,}1587^2 = \underline{0{,}975}$

d. La A være hendelsen at fuglen er en hunnfugl, og la B være hendelsen at fuglen blir klassifisert som hunnfugl. Vi har da at $P(A) = \frac{1}{2}$,

$P(B|A) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$, $\quad P(B|\bar{A}) = P\left(Z < \frac{65-67}{2{,}5}\right) = P(Z < -0{,}8) = 0{,}2119$

(der $Z \sim N(0,1)$). Bayes' setning gir da

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}8413 \cdot 1/2}{0{,}8413 \cdot 1/2 + 0{,}2119 \cdot 1/2} = \underline{0{,}80}.$$