ST0101 2006H. Løsningsskisse

1 (a) $EX = 1\cdot 0{,}09 + 2\cdot 0{,}38 + 3\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}20 + 5\cdot 0{,}06 + 6\cdot 0{,}02 = \underline{2{,}82}$

$EX^2 = 1\cdot 0{,}09 + 4\cdot 0{,}38 + 9\cdot 0{,}25 + 16\cdot 0{,}20 + 25\cdot 0{,}06 + 36\cdot 0{,}02 = 9{,}28$

$SD\,X = \sqrt{EX^2 - (EX)^2} = \sqrt{9{,}28 - 2{,}82^2} = \sqrt{1{,}3276} = \underline{1{,}15}$

(b) $P(X \geq 4) = 0{,}20 + 0{,}06 + 0{,}02 = \underline{0{,}28}$, $P(X=6 \mid X \geq 4) = \frac{P(X=6 \cap X \geq 4)}{P(X \geq 4)} = \frac{P(X=6)}{P(X\geq 4)} = \frac{0{,}02}{0{,}28} = \underline{0{,}071}$

(c) Y er binomisk fordelt med parametre $n=50$ og $p=0{,}28$. $EY = np = 14$, $SD\,Y = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10{,}08} = \underline{3{,}17}$
Antar at Y tilnærmet er $N(14, 3{,}17)$. $P(Y \geq 10) = P(Y \geq 9{,}5) = P\left(\frac{Y-14}{3{,}17} \geq \frac{9{,}5-14}{3{,}17}\right) \approx P(Z \geq -1{,}42)$
$= 1 - P(Z \leq -1{,}42) = 1 - 0{,}0778 = \underline{0{,}9222}$ (tabell D.3), der $Z \sim N(0,1)$. [Eksakt: $P(Y \geq 10) = 0{,}9260$]

(d) La A være hendelsen at reiret er bygd i løvtre. Da er $P(X=1 \mid A) = 0{,}05$ og $P(X=1 \mid \bar{A}) = 0{,}15$. Vi skal finne $P(A)$. Vi har $P(X=1) = P(X=1 \mid A)P(A) + P(X=1 \mid \bar{A})P(\bar{A})$
$= 0{,}05P(A) + 0{,}15(1 - P(A)) = 0{,}15 - 0{,}1P(A)$. Og $P(X=1) = 0{,}09$, slik at $0{,}15 - 0{,}1P(A) = 0{,}09$, som gir $P(A) = \underline{0{,}6}$.

2 (a) La A være hendelsen at flua er en hann. For en hann: $P(T>1 \mid A) = e^{-0{,}5} = \underline{0{,}61}$.
For en hunn: $P(T>1 \mid \bar{A}) = e^{-0{,}3} = \underline{0{,}74}$.

(b) $P(T>1) = P(T>1 \mid A)P(A) + P(T>1 \mid \bar{A})P(\bar{A}) = 0{,}61 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}74 \cdot \frac{1}{2} = \underline{0{,}67}$.

(c) $P(A \mid T>1) = \frac{P(T>1 \mid A)P(A)}{P(T>1)} = \frac{0{,}61 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}67} = \underline{0{,}45}$.

(d) Anta at buret holdes åpent i t minutter. Sannsynligheten for at en tilfeldig hann er igjen i buret er da $e^{-0{,}5t}$, og sannsynligheten for at en tilfeldig hunn er igjen er $e^{-0{,}3t}$. Hvis det var n hanner og n hunner i buret opprinnelig, er de forventede antallene som er igjen etter t minutter hhv. $ne^{-0{,}5t}$ og $ne^{-0{,}3t}$. Vi ønsker $ne^{-0{,}5t} = \frac{1}{2}ne^{-0{,}3t}$, dvs. $2 = e^{0{,}2t}$, $\ln 2 = 0{,}2t$, $t = 5\ln 2 = \underline{3{,}47}$ minutter.
Forventet andel hanner og hunner unnsluppet er hhv. $1 - e^{-0{,}5\cdot 3{,}47} = 0{,}823$ og $1 - e^{-0{,}3\cdot 3{,}47} = 0{,}646$, og forventet andel fluer unnsluppet er $\frac{1}{2}(0{,}823 + 0{,}646) = \underline{0{,}73}$.