

Å kaste yatzy

Vi spiller et spill med fem terninger. Målet er å oppnå at alle fem terningene viser det samme. I første omgang kaster vi fem terninger. Vi sparer på terninger som viser den verdien det er flest av. Hvis terningene for eksempel viser 3, 4, 4, 5, 6, sparer vi de to firerne. Hvis det er flere verdier som opptrer med maksimalt antall, velger vi én verdi vi vil spare på – hvis terningene for eksempel viser 3, 3, 4, 4, 6, sparer vi enten på de to treerne eller på de to firerne.

I andre omgang kaster vi de terningene vi ikke sparer på om igjen. Igjen sparer vi på terninger (blant alle fem terningene) som viser den verdien det er flest av (vi har lov å bytte verdi vi sparer på – hvis vi har spart på to toere og det nye kastet gir tre treere, sparer vi på treerne).

Slik fortsetter vi til alle terningene viser det samme.

Vi modellerer spillet med en markovkjede i diskret tid, med tilstander 1, 2, 3, 4 og 5, der X_i er antallet av den verdien det er flest av etter i kast. Hvis for eksempel terningene viser 3, 3, 4, 4, 6 etter fire kast, er $X_4 = 2$, og hvis de viser 3, 4, 4, 4, 6 etter fem kast, er $X_5 = 3$. Vi tenker oss tilstand 5 som en såkalt *absorberende* tilstand, det vil si at hvis markovkjeden har kommet i den tilstanden, så forblir den der (vi kaster null terninger). Vi starter i tilstand $X_0 = 1$. Å kaste alle terningene (som vi gjør i første kast), tilsvarer nemlig å spare på én terning blant fem terninger som viser fem forskjellige verdier.

Overgangsmatrisen for markovkjeden er

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{125}{648} & \frac{10}{27} & \frac{25}{36} & 0 & 0 \\ \frac{25}{1296} & \frac{5}{72} & \frac{5}{18} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{1296} & \frac{1}{216} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix},$$

det vil si at overgangssannsynligheten p_{ij} fra tilstand j til tilstand i står på plass (i, j) i P . Det oppgis at

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{25}{2916} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{875}{1944} & \frac{25}{81} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{28625}{69984} & \frac{25}{54} & \frac{625}{1296} & 0 & 0 \\ \frac{8375}{69984} & \frac{775}{3888} & \frac{275}{648} & \frac{25}{36} & 0 \\ \frac{221}{17496} & \frac{113}{3888} & \frac{121}{1296} & \frac{11}{36} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad P^3 = \begin{pmatrix} \frac{125}{157464} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{26875}{104976} & \frac{125}{729} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3419375}{7558272} & \frac{7625}{17496} & \frac{15625}{46656} & 0 & 0 \\ \frac{115625}{472392} & \frac{7375}{23328} & \frac{11375}{23328} & \frac{125}{216} & 0 \\ \frac{347897}{7558272} & \frac{5359}{69984} & \frac{8281}{46656} & \frac{91}{216} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis hvordan overgangssannsynlighetene $p_{51} = 1/1296$ og $p_{43} = 5/18$ er regnet ut.

(b) Hva er sannsynligheten for å få fem like verdier på terningene etter tre eller færre kast (dette svarer til å få yatzy i terningspillet *yatzy*)?

(c) Hva er sannsynligheten for å få fem like verdier på terningene etter tre eller færre kast gitt at du sparer to like verdier etter første kast? Er det en god nyhet å ha greid å få to like etter første kast hvis målet er å greie yatzy på tre kast?

Også forventet (gjennomsnittlig) antall kast for å oppnå yatzy er av interesse. La e_j være forventet antall kast som trengs for å oppnå yatzy hvis markovkjeden er i tilstand j (vi har greid å samle j like). Hvis vi har 4 like, må vi bruke minst ett kast. Vi kan oppnå yatzy på det kastet, eller vi kan, med sannsynlighet p_{44} , havne i tilstand 4 på nytt, og vi må igjen forvente e_4 nye kast for å oppnå yatzy:

$$e_4 = 1 + p_{44}e_4 \quad (1)$$

Hvis vi har 3 like, trenger vi på tilsvarende måte minst ett kast. Hvis vi er heldig, får vi yatzy. Ellers havner vi, med sannsynlighet p_{43} , i tilstand 4 og må forvente e_4 nye kast, eller, med sannsynlighet p_{33} i tilstand 3 igjen og må forvente e_3 nye kast:

$$e_3 = 1 + p_{43}e_4 + p_{33}e_3 \quad (2)$$

Tilsvarende for e_2 og e_1 :

$$e_2 = 1 + p_{42}e_4 + p_{32}e_3 + p_{22}e_2 \quad (3)$$

$$e_1 = 1 + p_{41}e_4 + p_{31}e_3 + p_{21}e_2 + p_{11}e_1 \quad (4)$$

(d) Løs likningssystemet (1)–(4) for å finne forventet antall kast for å oppnå yatzy når en har forskjellige verdier på alle terningene (eller ikke har startet å kaste), eller har oppnådd 2, 3 eller 4 like – altså henholdsvis e_1 , e_2 , e_3 og e_4 .