

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser**

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke

Tlf: 73 59 81 26, 990 41 673

Eksamensdato: august 2016

Eksamenstid (frå–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Ingen trykte eller skrivne hjelpemiddel tillatne. Bestemd kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s).

Annan informasjon:

I vurderinga tel kvart av dei ti bokstavpunkta likt.

Alle svar skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller dømme frå pensum).

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgåve 1

$$\text{La } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Finn eigenverdiane til A og ein ortonormal basis for kvart av eigeromma.
- b) Finn ei matrise P som er slik at $P^T A P$ er diagonal. Kva er $P^T A P$ lik?
- c) Finn tre lineært uavhengige eigenvektorar for A som òg er eigenvektorar for

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finn ei invertibel matrise Q som er slik at både $Q^{-1} A Q$ og $Q^{-1} B Q$ er diagonale.

Oppgåve 2

La P_2 vere det reelle vektorrommet av alle polynom av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer eit indreprodukt på P_2 ved at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

for alle $f(x), g(x) \in P_2$ (du treng ikkje vise at dette er eit indreprodukt) og lar

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$$

for alle $f(x) \in P_2$.

- a) Finn ein ortogonal basis for P_2 .
- b) Finn det ortogonale komplementet til underrommet $\text{span}\{1, x\}$ av P_2 .
- c) Finn polynomet $f(x) \in \text{span}\{1, x\}$ som er nærmast polynomet x^2 i den forstand at $\|x^2 - f(x)\|$ er minst mogleg. Teikn ei grov skisse av grafane til $y = f(x)$ og $y = x^2$ i same koordinatsystemet.

Oppgåve 3

La V vere underrommet med basis $\mathcal{B} = \{1, \cos, \sin\}$ av vektorrommet av alle reelle funksjonar definert på $\mathbb{R}$, der 1 er funksjonen som konstant er lik 1, $\cos$ er cosinus og $\sin$ er sinus. La D vere lineæroperatoren på V definert ved at $D(f) = f'$ (den deriverte av f).

- a) Finn matrisa $[D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ til D med omsyn til $\mathcal{B}$.
- b) Finn ein basis for kjernen (nullrommet) til D . Kva er rangen til D ($\text{rank } D$)? Er 0 ein egenverdi til D ?

Oppgåve 4

Ein maurkoloni har fordelt seg på to tuer, A og B . Til kvar tid vil 90 % av maurane som sist overnatta i tue A overnatte der neste natta òg, mens 10 % av dei held neste natta til i tue B . Av maurane som sist overnatta i tue B , flyttar 50 % over til tue A neste natta, mens 50 % blir verande i tue B .

Kor mange prosent av maurane er det i kvar av dei to tuene etter mange netter?

Oppgåve 5

La A vere ei kompleks kvadratisk matrise. Vis at A er hermitisk viss og berre viss A er unitært diagonaliserbar og A berre har reelle eigenverdiar.