

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser**

Fagleg kontakt under eksamen: Øyvind Bakke

Tlf: 73 59 81 26, 990 41 673

Eksamensdato: 31. mai 2016

Eksamenstid (frå–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Ingen trykte eller skrivne hjelpemiddel tillatne. Bestemd kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s).

Annan informasjon:

I vurderinga tel kvart av dei ti bokstavpunkta likt.

Alle svar skal grunngjevast (t.d. ved at mellomrekning blir tatt med eller ved tilvising til teori eller dømme frå pensum).

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgåve 1

$$\text{La } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Finn eigenverdiane til A og ein ortonormal basis for kvart av eigeromma.
- b) Finn ei matrise P som er slik at $P^T A P$ er diagonal. Kva er $P^T A P$ lik?
- c) Finn ein basis for $\mathbb{R}^3$ som består av eigenvektorar for A , men som ikkje er ein ortogonal basis.

Oppgåve 2

La P vere det reelle vektorrommet av alle polynom. Vi definerer eit indreprodukt på P ved at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

for alle $f(x), g(x) \in P$ (du treng ikkje vise at dette er eit indreprodukt) og lar

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$$

for alle $f(x) \in P$. Sjå på underrommet $V = \text{span}\{1, x^2, x^3\}$ av P .

Det blir oppgitt at $\int_{-1}^1 x^t dx = 0$ for $t = 1, 3, 5, \dots$ og at $\int_{-1}^1 x^t dx = 2/(t+1)$ for $t = 0, 2, 4, \dots$.

- a) Finn eit reelt tal c slik at basisen $\{1, x^2 - c, x^3\}$ for V er ortogonal. (Du treng ikkje vise at dette er ein basis for V uansett verdi av c .)
- b) Finn polynomet $f(x) \in V$ som er nærmast polynomet x i den forstand at $\|x - f(x)\|$ er minst mogleg. Teikn ei grov skisse av grafane til $y = f(x)$ og $y = x$ i same koordinatsystemet.

Oppgåve 3

La t vere eit reelt tal.

- a) Vis at $\mathcal{B} = \{(1, 0, t), (0, 1, t), (-t, 0, 1)\}$ er ein basis for $\mathbb{R}^3$, uansett verdien av t .

La $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vere lineærtransformasjonen gitt ved at $T(x, y, z) = (x + y, z)$ for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (du treng ikkje vise at dette er ein lineærtransformasjon), og la $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ vere standardbasisen til $\mathbb{R}^2$.

- b) Finn ein basis for kjernen (nullrommet) til T . Kva er rangen til T ($\text{rank } T$)? Finn matrisa $[T]_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$ til T med omsyn til $\mathcal{B}$ og $\mathcal{E}$.

Ein lineærtransformasjon $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er gitt ved at $[S]_{\mathcal{B}, \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- c) Kva blir $[T \circ S]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$? Kva for nokre t gjer $T \circ S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ éineintydig (1-1, injektiv)?

Oppgåve 4

La skrivemåten $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ tyde at alle elementa i vektoren $\mathbf{v}$ er større enn eller lik 0. Vi har n fabrikkar som sel varer til kvarandre og til marknaden utanom fabrikkane. La $\mathbf{x}$ vere ein vektor som på plass i har totalt sal frå fabrikk i . La $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ vere ein vektor som på plass i har sal frå fabrikk i til marknaden. La C vere $n \times n$ -matrisa der alle elementa på hovuddiagonalen er 0, og som har alle andre element lik $1/n$. Vi antar ein open økonomisk Leontief-modell som seier $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$.

Er vi garanterte at det finst ein $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ som gjer at $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$, uansett kva $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ er? Finn $\mathbf{x}$ når $n = 3$ og

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100\,000 \\ 100\,000 \\ 100\,000 \end{pmatrix}.$$

Oppgåve 5

La A vere ei kvadratisk reell matrise. Vis at A er symmetrisk viss og berre viss $A^T A = A A^T$ og A berre har reelle eigenverdiar. (Vink: Du kan bruke, utan å prove det, at A er unitært diagonaliserbar dersom $A^T A = A A^T$.)