

MA1202/MA6202 2016S – løsningskisse



Oppgave 1

a) Vi finner det karakteristiske polynomet,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 - \lambda^2 \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 - \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 + \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + (\lambda - 1)(\lambda + 1)) \\ &= (\lambda - 1)^2(1 + \lambda + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),\end{aligned}$$

som har røtter -2 og 1 , slik at egenverdiene er -2 og 1 . I den andre overgangen er tredje rad addert til andre rad og tredje rad multiplisert med λ subtrahert fra første rad. I den fjerde overgangen er første rad subtrahert fra andre rad. Determinanten kan naturligvis også regnes ut mer direkte. Fordelen med å gjøre det som her, er at en slipper noen avsluttende faktorisering.

Egenrommet til -2 er løsningsrommet til $(2I + A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvis $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, får vi

$$\begin{aligned}-2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 & -3x_2 - 3x_3 &= 0 & x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 & -3x_2 - 3x_3 &= 0 & x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0, & x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0 & x_2 &= -x_3 \\ x_1 - x_3 &= 0, & x_1 &= x_3,\end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I den første overgangen er tredje rad addert til andre rad og to ganger tredje rad addert til første rad. I den tredje overgangen er første rad addert til andre rad. Gauss–Jordan-elimineringen kan naturligvis også gjøres på matriseform. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\}$ er dermed en basis for egenrommet til -2 , og den er ortogonal, siden den bare består av én vektor. Siden $\left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, er $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\}$ en ortonormal basis for egenrommet til -2 .

Egenrommet til 1 er løsningsrommet til $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvis $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, får vi

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 & x_1 &= x_2 - x_3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0,\end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right\}$ er dermed en basis for egenrommet til 1. Men den er ikke ortogonal. Vi kan prøve å la $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ være den ene vektoren i en ortogonal basis, og velge s og t slik at denne vektoren og $s\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ er ortogonale: $0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left(s\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} s-t & s & t \end{pmatrix}^T = 2s - t$. Vi kan velge $s = 1$ og $t = 2$ og får en ortogonal basis $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right\}$.

Vi kunne også ha brukt Gram–Schmidts ortogonaliseringsmetode for å finne den andre vektoren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T - \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Ved å normalisere vektorene som ovenfor (multiplisere med én dividert på lengden av vektoren), får vi den ortonormale basisen $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right\}$ for egenrommet til 1.

- b) Siden A er symmetrisk, vil en matrise P som har vektorene i de ortonormale basisene til egenrommene til A som søyler, ortogonalt diagonalisere A . Da er $P^T A P$ diagonal, med egenverdiene til A på diagonalen, i samme rekkefølge som de tilhørende egenvektorene i P . Vi kan velge

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \text{som gir} \quad P^T A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I oppgaven blir det ikke krevd at P skal være ortogonal, bare at $P^T A P$ skal være diagonal. Så for eksempel

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{som gir} \quad P^T A P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

må godtas. Her er $P^T \neq P^{-1}$, så dette er *ikke* en diagonalisering av A .

c) Vi ser at

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ er en egenvektor også for B , med egenverdi -1 .

Egenvektorene i det andre egenrommet til A var av form $\begin{pmatrix} s-t & s & t \end{pmatrix}^T$, og vi ønsker å finne s , t og λ slik at

$$\lambda \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

Øverste koordinat gir $\lambda(s-t) = -(s-t)$, slik at $s = t$ eller $\lambda = -1$. Hvis vi velger $s = t = 1$ for den første muligheten, får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, som har egenverdi $\lambda = 1$. Hvis vi velger $s = -1$ og $t = 1$ for den andre muligheten, får vi egenvektoren $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, som har egenverdi $\lambda = -1$. Vi har nå én egenvektor med egenverdi 1 og to egenvektorer med egenverdi -1 . De to sistnevnte er lineært uavhengige, da den ene ikke er et skalart multiplum av den andre. De er også lineært uavhengig av førstnevnte, da denne tilhører et annet egenrom.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har lineært uavhengige egenvektorer for både A og B som søyler, slik at både $Q^{-1}AQ$ og $Q^{-1}BQ$ er diagonal.

Oppgave 2

- a) Gram–Schmidt-prosessen gir en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots\}$ fra en basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots\}$ ved at vi lar $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{v}_1\}^\perp} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{v}_1\}} \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_3 = \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^\perp} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}} \mathbf{u}_3$, $\dots$. Husk også at når $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er en ortogonal mengde og $\mathbf{u}$ en vektor, så er $\text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle} \mathbf{v}_k$ (den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på underrommet utspekt av $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$).

Vi bruker Gram–Schmidt-prosessen til å finne en ortogonal basis $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x)\}$ fra basisen $\{1, x, x^2\}$ for P_2 :

$$f_0(x) = 1$$

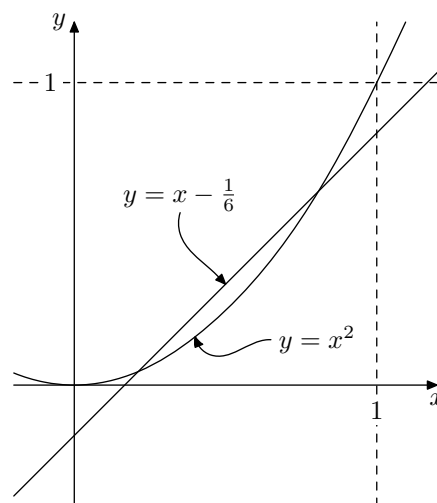
$$f_1(x) = x - \frac{\langle x, f_0(x) \rangle}{\langle f_0(x), f_0(x) \rangle} f_0(x) = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x - \frac{1/2}{1} = x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, f_0(x) \rangle}{\langle f_0(x), f_0(x) \rangle} f_0(x) - \frac{\langle x^2, f_1(x) \rangle}{\langle f_1(x), f_1(x) \rangle} f_1(x) \\ &= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx}{1} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot (x - 1/2) \, dx}{\int_0^1 (x - 1/2)^2 \, dx} \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- b) Det ortogonale komplementet til $\text{span}\{1, x\} = \text{span}\{f_0(x), f_1(x)\}$ består av alle alle polynomer $c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ i P_2 som er ortogonal på alle polynomer i $\text{span}\{f_0(x), f_1(x)\}$ – det vil si både på $f_0(x)$ og på $f_1(x)$. $0 = \langle c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x), f_0(x) \rangle = c_0 \langle f_0(x), f_0(x) \rangle$ gir $c_0 = 0$, og $0 = \langle c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x), f_1(x) \rangle = c_1 \langle f_1(x), f_1(x) \rangle$ gir $c_1 = 0$. Det ortogonale komplementet består altså av alle polynomer av form $c_2 f_2(x)$, og er lik $\text{span}\{f_2(x)\} = \text{span}\{x^2 - x + \frac{1}{6}\}$.

- c) Approksimasjonsteoremet sier at $f(x) = \text{proj}_{\text{span}\{1, x\}} x^2$, den ortogonale projeksjonen av x^2 på $\text{span}\{1, x\}$. Projeksjonsteoremet sier at $x^2 = f(x) + g(x)$, for en $g(x)$ i det ortogonale komplementet til $\text{span}\{1, x\}$. Fra (b) har vi da $x^2 = f(x) + c f_2(x)$ for et reelt tall c , slik at $f(x) = x^2 - c f_2(x) = x^2 - c(x^2 - x + \frac{1}{6})$. Eneste mulighet for at $f(x) \in \text{span}\{1, x\}$ er da at $c = 1$, slik at $f(x) = x^2 - (x^2 - x + \frac{1}{6}) = x - \frac{1}{6}$.

Vi kan også regne ut $\text{proj}_{\text{span}\{1, x\}} x^2 = \frac{\langle x^2, f_0(x) \rangle}{\langle f_0(x), f_0(x) \rangle} f_0(x) - \frac{\langle x^2, f_1(x) \rangle}{\langle f_1(x), f_1(x) \rangle} f_1(x)$ på vanlig måte. Vi kan da spare arbeid ved å innse at denne projeksjonen inngikk når vi regnet ut $f_2(x)$ i (a).



Oppgave 3

- a) $D(1) = 0$, $D(\cos) = -\sin$ og $D(\sin) = \cos$. Dette gir $[D(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $[D(\cos)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ og $[D(\sin)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Dermed er

$$[D]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) La 0 være funksjonen som er konstant lik 0 . $0 = D(a \cdot 1 + b \cos + c \sin) = -b \sin + c \cos$ hvis og bare hvis $b = c = 0$, siden $\cos$ og $\sin$ er lineært uavhengige. Så kjernen til D består av alle funksjoner av form $a \cdot 1$, og er altså lik $\text{span}\{1\}$. (Vi kan også gå via nullrommet til $[D]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, som vi finner at er alle vektorer av form $t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, som gir at kjernen til D består av alle funksjoner av form $a \cdot 1$.)

Dimensjonssetningen gir $\text{rank } T = \dim T - \text{nullity } T = 3 - 1 = 2$.

Hvis kjernen til en lineæroperator har dimensjon én eller større (det vil si at kjernen består av flere vektorer enn nullvektoren), er kjernen nettopp egenrommet til egenverdien 0 . Så 0 er en egenverdi til D .

Oppgave 4

Gitt en maur. La sannsynligheten for at den hvis den er i A , flytter seg til B , være $0,1$ og sannsynligheten for at den hvis den er i B , flytter seg til A , være $0,5$. Dette beskriver en markovkjede med to tilstander (A og B). Oppgaven spør om sannsynlighetene for at mauren er på hver tue i det lange løp.

Overgangsmatrisen til markovkjeden er

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Den er regulær (alle elementene er positive), og sannsynlighetene i det lange løp er gitt ved vektoren $\mathbf{q}$ som har 1 som sum av elementene og som tilfredsstiller $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$, eller $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (merk at $\mathbf{q}$ er en egenvektor til egenverdien 1). Hvis vi lar $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}^T$, får vi

$$\begin{aligned} 0,1q_1 - 0,5q_2 &= 0 \\ -0,1q_1 + 0,5q_2 &= 0, \end{aligned} \qquad q_1 = 5q_2.$$

I tillegg skal $1 = q_1 + q_2 = 5q_2 + q_2 = 6q_2$, slik at $q_2 = \frac{1}{6}$ og $q_1 = \frac{5}{6}$.

Etter mange netter er $\frac{5}{6} \cdot 100\% \approx 83,3\%$ av maurene i tue A og $\frac{1}{6} \cdot 100\% \approx 16,7\%$ av maurene i tue B .

Oppgave 5

Hvis A er hermitisk, det vil si $A^* = A$, er åpenbart $A^*A = AA^*$, altså normal, og dermed unitært diagonaliserbar. Vi vet også fra teorien at en hermitisk matrise bare har reelle egenverdier.

Omvendt – anta at A er unitært diagonaliserbar og bare har reelle egenverdier. Det fins da en unitær matrise U og en diagonal matrise D med egenverdiene til A på diagonalen slik at $A = UDU^*$. Da er $A^* = (UDU^*)^* = (U^*)^*D^*U^* = UDU^* = A$, der den nest siste likheten følger av at D er reell. Så $A = A^*$, altså er A hermitisk.