Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet *Tilføyelse 3. juni 2016*

Institutt for matematiske fag

MA1202/MA6202 2016V – løsningsskisse

Oppgave 1

a) Vi finner det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda-3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-3) - (\lambda-3) = \big((\lambda-2)^2 - 1\big)(\lambda-3) \\ &= (\lambda-2-1)(\lambda-2+1)(\lambda-3) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2,\end{aligned}$$

som har røtter 1 og 3, slik at egenverdiene er 1 og 3.

Egenrommet til 1 er løsningsrommet til $(I-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Hvis $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, får vi

$$\begin{aligned} -x_1 \quad\;\; - x_3 &= 0 \\ -2x_2 \quad\; &= 0 \\ -x_1 \quad\;\; - x_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_3 &= -x_1 \\ x_2 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right\}$ er dermed en basis for egenrommet til 1, og den er ortogonal, siden den bare består av én vektor. Siden $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, er $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right\}$ en ortonormal basis for egenrommet til 1.

Egenrommet til 3 er løsningsrommet til $(3I-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Hvis $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, får vi

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0, \end{aligned} \qquad x_3 = x_1, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right\}$ er dermed en basis for egenrommet til 3, og vi er så heldig at den er ortogonal, siden $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = 1\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$. Ved å normalisere vektorene som ovenfor (multiplisere med én dividert på lengden av vektoren), får vi den ortonormale basisen $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right\}$ for egenrommet til 3.

b) Siden A er symmetrisk, vil en matrise P som har vektorene i de ortonormale basisene til egenrommene til A som søyler, ortogonalt diagonalisere A. Da er $P^{\mathrm{T}}AP$ diagonal, med egenverdiene til A på diagonalen, i samme rekkefølge som de tilhørende egenvektorene i P. Vi kan velge

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{som gir} \qquad P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I oppgaven blir det ikke krevd at P skal være ortogonal, bare at $P^{\mathrm{T}}AP$ skal være diagonal. Så for eksempel

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{som gir} \qquad P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

må godtas. Her er $P^{\mathrm{T}} \neq P^{-1}$, så dette er *ikke* en diagonalisering av A.

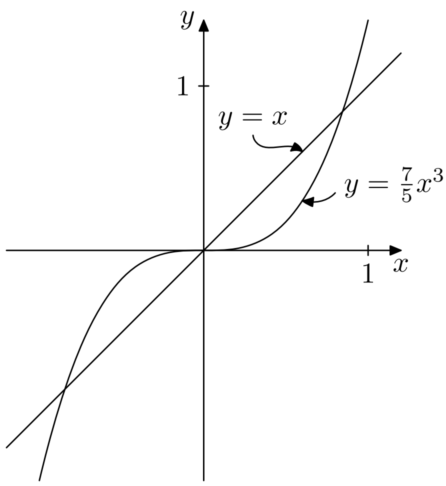
c) Fra (a) har vi at $\left\{ s\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + t\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$ er egenrommet til 3. Vi valgte $(s,t) = (1,0)$ og $(s,t) = (0,1)$ når vi fant en basis, og den ble ortogonal. Ved å velge for eksempel $(s,t) = (1,1)$ og $(s,t) = (0,1)$, får vi basisen $\left\{ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right\}$ for egenrommet, og den er ikke ortogonal. Ved å legge til en basis for egenrommet til 1, får vi for eksempel basisen $\left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right\}$ for $\mathbb{R}^3$. Den består av egenvektorer for A, men den er ikke ortogonal.

Oppgave 2

a) Vi observerer at 1 og x^3 er ortogonale, da $\langle 1, x^3\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$. Også $x^2 - c$ og x^3 er ortogonale, uavhengig av verdi av c, da $\langle x^2 - c, x^3\rangle = \langle x^2, x^3\rangle - c\langle 1, x^3\rangle = \int_{-1}^{1} x^5\,dx - c\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$. Til slutt ønsker vi $0 = \langle 1, x^2 - c\rangle = \langle 1, x^2\rangle - c\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx - c\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3} - 2c$, som gir $c = \frac{1}{3}$.

b) Approksimasjonsteoremet sier at $f(x) = \operatorname{proj}_V x$, den ortogonale projeksjonen av x på V. Siden $\{1, x^2 - \frac{1}{3}, x^3\}$ er en ortogonal basis for V, blir $f(x) = \operatorname{proj}_V x = \frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 + \frac{\langle x, x^2-1/3\rangle}{\langle x^2-1/3, x^2-1/3\rangle}(x^2 - \frac{1}{3}) + \frac{\langle x,x^3\rangle}{\langle x^3,x^3\rangle}x^3$. Vi ser at $\langle x, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ og at $\langle x, x^2 - \frac{1}{3}\rangle = \langle x, x^2\rangle - \frac{1}{3}\langle x, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$. Dermed er

$$f(x) = \frac{\langle x, x^3\rangle}{\langle x^3, x^3\rangle}x^3 = \frac{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int_{-1}^{1} x^6\,dx}x^3 = \frac{2/5}{2/7}x^3 = \frac{7}{5}x^3.$$



Oppgave 3

a) Ved å addere t ganger første rad til tredje rad i

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{får vi} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1+t^2 \end{pmatrix},$$

som har rang 3, siden de tre radene er lineært uavhengige ($1 + t^2 \neq 0$ for alle t). Siden rangen bevares ved elementære radoperasjoner, er $\operatorname{rank} A = 3$, som er ekvivalent med at radene i A utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$. (Det er flere måter å løse denne oppgaven på. Et alternativ er å vise at $\det A \neq 0$ for alle t.)

b) $0 = T(x, y, z) = (x + y, z)$ hvis og bare hvis $x + y = 0$ og $z = 0$, det vil si at (x, y, z) er av form $s(1, -1, 0)$, $\ s \in \mathbb{R}$. $\{(1, -1, 0)\}$ er altså en basis for kjernen til T. Dimensjonssetningen gir $\operatorname{rank} T = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{nullity} T = 3 - 1 = 2$.

$T(1, 0, t) = (1, t)$, $\ T(0, 1, t) = (1, t)$ og $T(-t, 0, 1) = (-t, 1)$. Dette gir $[T(1, 0, t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\ [T(0, 1, t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ og $[T(-t, 0, 1)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -t & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Dermed er

$$[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$[T \circ S]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -t \\ t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -2t \\ 1+t & 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

$T \circ S$ er énentydig hvis og bare hvis $[T \circ S]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ er invertibel. Vi finner determinanten:

$$\begin{aligned} \det[T \circ S]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} &= \begin{vmatrix} 1-t & -2t \\ 1+t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t)(1-t^2) + 2t(1+t) \\ &= (1-t)(1-t)(1+t) + 2t(1+t) = (1 - 2t + t^2 + 2t)(1+t) = (1+t^2)(1+t) \end{aligned}$$

$[T \circ S]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ er invertibel hvis og bare hvis $\det[T \circ S]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \neq 0$, altså hvis og bare hvis $t \neq -1$.

Oppgave 4

Vi er garantert at det fins en $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ som gjør at $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ hvis C er produktiv, det vil si hvis det fins en $\boldsymbol{x}^* \geq \mathbf{0}$ som er slik at $\boldsymbol{x}^* > C\boldsymbol{x}^*$. La $\mathbf{1}$ være vektoren der alle elementene er 1. Alle elementene i $C\mathbf{1}$ er lik $(n-1) \cdot 1/n + 1 \cdot 0 = (n-1)/n < 1$, slik at $\mathbf{1} > C\mathbf{1}$. Så C er produktiv.

For $n = 3$ og gitt $\boldsymbol{d}$ skal vi løse det lineære likningssystemet $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$, eller $(I - C)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Dette kan for eksempel gjøres ved Gauss–Jordan-eliminasjon. Men vi kan slippe lettere unna: Symmetrien i oppsettet gjør at vi prøver med en løsning der alle de tre fabrikkene selger for like mye – la oss si at alle elementene i $\boldsymbol{x}$ er lik x. Da blir hver likning i likningssystemet $(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3})x = 100\,000$, og vi får straks at $x = 300\,000$. (Dette er også eneste løsning, siden $I - C$ er invertibel hvis C er produktiv.)

Oppgave 5

Hvis A er symmetrisk, det vil si $A^{\mathrm{T}} = A$, er åpenbart $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$, og vi vet fra teorien at A bare har reelle egenverdier.

Omvendt – anta at $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$ og at A bare har reelle egenverdier. Siden A er reell, er $A^* = A^{\mathrm{T}}$, slik at $A^*A = AA^*$. Dermed er A normal, og unitært diagonaliserbar. Det fins da en unitær matrise U og en diagonal matrise D med egenverdiene til A på diagonalen slik at $A = UDU^*$. Da er $A^* = (UDU^*)^* = (U^*)^*D^*U^* = UDU^* = A$, der den nest siste likheten følger av at D er reell. Så $A = A^*$. Men siden A er reell, er også $A^{\mathrm{T}} = A^*$, og dermed er $A = A^{\mathrm{T}}$, og A symmetrisk.