MA0001 2006H. Løsningsskisse

1 (a) $f_x = 2x e^{-x^2/2-y^2/2} + (x^2+1)e^{-x^2/2-y^2/2}\cdot(-x) = x(1-x^2)e^{-x^2/2-y^2/2}$

$f_y = -(x^2+1)y\, e^{-x^2/2-y^2/2}$

(b) $\nabla f = [x(1-x^2), -(x^2+1)y]'\, e^{-x^2/2-y^2/2}$, som har samme retning som $[x(1-x^2), -(x^2+1)y]'$. Når $x=0$ og $y=1$: $[0\ \ -1]'$

(c) $f_x=0$ gir $x=0$ eller $x=\pm1$. $f_y=0$ gir $y=0$. Kritiske punkter: $(-1,0)$, $(0,0)$ og $(1,0)$.

(d) Høyeste og laveste temp. enten i kritisk punkt eller på randa, $x^2+y^2=4$. Lagranges metode, bibetingelse $g=x^2+y^2-4$. $\nabla g = 2[x,y]'$.

$\nabla f = \lambda \nabla g$: $[x(1-x^2), -(x^2+1)y]e^{-x^2/2-y^2/2} = 2\lambda[x,y]$,

$x(1-x^2)e^{-x^2/2-y^2/2} = 2\lambda x$ og $-(x^2+1)ye^{-x^2/2-y^2/2} = 2\lambda y$.

Hvis $x\neq0$ og $y\neq0$: $2\lambda = \dfrac{x(1-x^2)e^{-x^2/2-y^2/2}}{x} = (1-x^2)e^{-x^2/2-y^2/2}$ og

$2\lambda = \dfrac{-(x^2+1)y\,e^{-x^2/2-y^2/2}}{y} = -(x^2+1)e^{-x^2/2-y^2/2}$, slik at

$(1-x^2)e^{-x^2/2-y^2/2} = -(x^2+1)e^{-x^2/2-y^2/2}$, $1-x^2=-x^2-1$, som er umulig.

Så $x=0$ eller $y=0$. Med $x=0$ gir bibetingelsen $y^2=4$, $y=\pm2$, og med $y=0$ får vi $x=\pm2$.

Vi har 7 kandidater: $(\pm1,0)$, $(0,0)$, $(0,\pm2)$, $(\pm2,0)$.

$f(\pm1,0)=2e^{-1/2}\approx1{,}21$, $f(0,0)=1$, $f(0,\pm2)=e^{-2}\approx0{,}14$, $f(\pm2,0)=5e^{-2}\approx0{,}68$

Høyeste temperatur er altså $1{,}21\,°C$, laveste $0{,}14\,°C$.

Alternativ for å finne største og minste verdi når $x^2+y^2=4$:

Da er $f(x,y)=(x^2+1)e^{-\frac12(x^2+y^2)}=(x^2+1)e^{-2}$. Denne er størst mulig når $x=\pm2$ og minst mulig når $x=0$. Vi får samme punkter som ved Lagranges metode.

2 (a) $\det M = 15\cdot0-12{,}5\cdot0{,}62=-7{,}75$, $M^{-1}=\dfrac{1}{-7{,}75}\begin{bmatrix}0 & -12{,}5\\ -0{,}62 & 15\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0 & 1{,}613\\ 0{,}080 & -1{,}935\end{bmatrix}$

(b) $\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}15-\lambda & 12{,}5\\ 0{,}62 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda-7{,}75$, $\det(M-\lambda I)=0$: $\lambda=\dfrac{15\pm\sqrt{225+31}}{2}=\dfrac{15\pm16}{2}$,

$\lambda=-0{,}5$ eller $\lambda=15{,}5$.

(c) Egenverdien $-0{,}5$: $(M+0{,}5I)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}15{,}5 & 12{,}5\\ 0{,}62 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $15{,}5u+12{,}5v=0$, $0{,}62u+0{,}5v=0$.

F.eks. $u=1$, $v=-\frac{15{,}5}{12{,}5}=-\frac{0{,}62}{0{,}5}=-1{,}24$. Egenvektor $\begin{bmatrix}1\\-1{,}24\end{bmatrix}$.

Egenverdien $15{,}5$: $(M-15{,}5I)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-0{,}5 & 12{,}5\\ 0{,}62 & -15{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $-0{,}5u+12{,}5v=0$, $0{,}62u-15{,}5v=0$.

F.eks. $v=1$, $u=\frac{12{,}5}{0{,}5}=\frac{15{,}5}{0{,}62}=25$. Egenvektor $\begin{bmatrix}25\\1\end{bmatrix}$.

(d) Forholdet er gitt ved egenvektoren som hører til største egenverdi, altså 25:1. Relativ vekstrate er største egenverdi, 15,5.