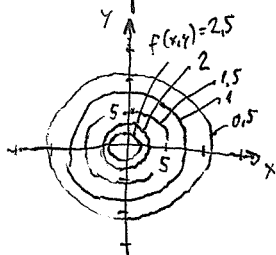


- 1(a) skal finne nivåkurven $f(x,y)=c$, dvs. $\frac{81}{27+x^2+y^2}=c$, $27+x^2+y^2=\frac{81}{c}$,
 $x^2+y^2=\frac{81}{c}-27$, dvs. sirkler med radius $\sqrt{\frac{81}{c}-27}$.



For c lik 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5 og 3 blir dette sirkler med radius hhv. 11,6, 7,3, 5,2, 3,7, 2,3 og 0 (den siste blir altså bare et punkt).

$$(b) \nabla f = \left[-\frac{81 \cdot 2x}{(27+x^2+y^2)^2}, -\frac{81 \cdot 2y}{(27+x^2+y^2)^2} \right] = -\frac{162}{(27+x^2+y^2)^2} [x, y].$$

I (5,10) er helningen oppover størst i retning $\nabla f(5,10)$, som er parallell med $[-5, 10]$. Størst helning nedover altså i retning $[5, -10]$.

- (c) Nærmest i $f(x,y)$ er minst når $(x,y)=(0,0)$, mens teller er konstant. Så $f(0,0)=3$ er abs. maksimumsverdi for f , og største høyde er 3.

Minste høyde har vi når nærmest er størst mulig, dvs. x^2+y^2 er størst mulig, dvs. når (x,y) har størst mulig avstand fra (0,0). Innenfor kvadratet er det i hjørnene, f.eks. $(15,15)$, som gir høyde $f(15,15)=9/53 \approx 0,17$.

- (d) Største helning i (x,y) er $|\nabla f| = \frac{162}{(27+x^2+y^2)^2} \sqrt{x^2+y^2}$. Hvis (x,y) har avstand t fra (0,0), er $x^2+y^2=t^2$, og største helning blir $g(t) = \frac{162t}{(27+t^2)^2}$. Vi

skal finne abs. maksimum av g på $[0, 15]$. Finnes kritiske pkt.:

$$g'(t) = 162 \frac{(27+t^2)^2 - t \cdot 2(27+t^2) \cdot 2t}{(27+t^2)^4} = 162 \frac{729+54t^2+t^4-108t^2-4t^4}{(27+t^2)^4}$$

$$= 162 \frac{-3t^4-54t^2+729}{(27+t^2)^4} = -3 \cdot 162 \frac{t^4+18t^2-243}{(27+t^2)^4}. \quad g'(t)=0 \text{ når } t^4+18t^2-243=0,$$

$$\text{dvs. } t^2 = \frac{-18 \pm \sqrt{324+972}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{-18 \pm 36}{2} = -9 \pm 18, \text{ dvs. } t^2=9, t=3.$$

$$g(3) = \frac{162 \cdot 3}{(27+3^2)^2} = 0,375, \text{ mens i endepunktene har vi } g(0)=0, g(15) \approx 0,038.$$

Så maksimal helning er størst i avstand 3 m fra (0,0). For et punkt i avstand 3 fra (0,0), er $x^2+y^2=9$, og høyden er $f(x,y)=\frac{81}{27+9}=2,25$.

Merk: Regnearbeidet kan forenkles ved å forkorte det første uttrykket for $g'(t)$ med $27+t^2$. Da får vi bare én likning som gir oss $t=3$ direkte.

$$2(a) A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}. \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-3-\lambda) - (-2) \cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Finne egenverdier: $\det(A - \lambda I) = 0$ gir $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$, $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$,

dvs. egenverdier -2 og 5 . Finne egenvektorene:

Til -2 : $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $8u - 2v = 0$, $4u - v = 0$. Velger $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Til 5 : $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u - 2v = 0$, $4u - 8v = 0$. Velger $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(b) \begin{array}{l} 6x - 2y - 8 = 0 \\ 4x - 3y + 3 = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 6 & -2 & | & 8 \\ 4 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 4 \\ 4 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 4 \\ 1 & -2 & | & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & | & 25 \\ 1 & -2 & | & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 5 \\ 1 & -2 & | & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 5 \\ 1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

dvs. likevektspkt. $(3, 5)$.

Jacobi-matrisen er A fra (a). Den har en pos. og en neg. egenverdi, og likev. pkt. er ustabil.

$$(c) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

$$(d) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} \text{ iflg. opplysningene.}$$

Når $t=0$: $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $c_1 + 2c_2 = 1$, $4c_1 + c_2 = -3$. Fra 1. likning er

$c_1 = 1 - 2c_2$. Innsatt i 2. likn.: $4(1 - 2c_2) + c_2 = -3$, $4 - 7c_2 = -3$, $c_2 = 1$.

Dermed er $c_1 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$. Dvs. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$.