1(a) $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0{,}9-\lambda & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}4$

$\det(M-\lambda I)=0$: $\lambda = \dfrac{1{,}4 \pm \sqrt{1{,}96-1{,}6}}{2} = \dfrac{1{,}4 \pm 0{,}6}{2} = 0{,}7 \pm 0{,}3.$

Egenverdier $\underline{1}$ og $\underline{0{,}4}$.

(b) $(M-1I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{0}$: $\begin{matrix} -0{,}1u + 0{,}5v = 0 \\ 0{,}1u - 0{,}5v = 0 \end{matrix}$ $\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}$ er en egenvektor for 1.

$(M-0{,}4I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{0}$: $\begin{matrix} 0{,}5u + 0{,}5v = 0 \\ 0{,}1u + 0{,}1v = 0 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for 0,4.

(c) $x_n = 0{,}9x_{n-1} + 0{,}5y_{n-1}$ og $y_n = 0{,}1x_{n-1} + 0{,}5y_{n-1}$ iflg. opplysningene. Dette kan skrives $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$, dvs. $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

(d) La $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Da er $M = PDP^{-1}$, og $M^n = PD^nP^{-1}$.

$P^{-1} = \dfrac{1}{5\cdot(-1)-1\cdot 1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}4^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18\,000 \\ 6\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3000 \\ 1000 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4000 \\ -2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4000 \\ -2000\cdot 0{,}4^n \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 20000 - 2000\cdot 0{,}4^n \\ 4000 + 2000\cdot 0{,}4^n \end{bmatrix}}$

Når $n \to \infty$: $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \to \underline{\begin{bmatrix} 20000 \\ 4000 \end{bmatrix}}$.

<u>Alt.</u>: Skriv $\begin{bmatrix} 18\,000 \\ 6\,000 \end{bmatrix}$ på form $a\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dvs.

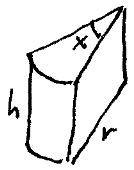
$$\begin{matrix} 5a + b = 18000 \\ a - b = 6000 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6a = 24000 \\ a - b = 6000 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a = 4000 \\ b = a - 6000 = -2000. \end{matrix}$$

$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = M^n\left(4000\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 2000\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 4000\,M^n\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 2000\,M^n\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= 4000\cdot 1^n\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 2000\cdot 0{,}4^n\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20000 - 2000\cdot 0{,}4^n \\ 4000 + 2000\cdot 0{,}4^n \end{bmatrix}$

(Argumentasjon ved egenvektor til største egenverdi godtas også.)

2(a) Osten utgjør en andel $x/2\pi$ av en rett sirkulær sylinder, som har volum $\pi r^2 h$. Osten har dermed volum $\frac{x}{2\pi}\cdot \pi r^2 h = \underline{\frac{1}{2} x r^2 h}$.



Overflaten består av to sirkelsektorer, hver med areal $\frac{x}{2\pi}\cdot \pi r^2$, to rektangler, hver med areal rh, og ett bakstykke, som "utbrettet" blir et rektangel med areal $\frac{x}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot h$. Til sammen $\frac{x}{2\pi}\cdot \pi r^2 \cdot 2 + rh\cdot 2 + \frac{x}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot h$ $= \underline{xr^2 + xrh + 2rh}$.

(b) Når $\frac{1}{2}xr^2h = 1$, er $h = \frac{2}{xr^2}$. Overflatearealet blir da

$$f(x,r) = xr^2 + xr\cdot\frac{2}{xr^2} + 2r\cdot\frac{2}{xr^2} = \underline{xr^2 + \frac{2}{r} + \frac{4}{xr}}.$$

$$f_x = \underline{r^2 - \frac{4}{x^2 r}}, \quad f_r = \underline{2xr - \frac{2}{r^2} - \frac{4}{xr^2}}.$$

(c) f har ikke noe absolutt maksimum, siden $f(x,r) \to \infty$ når $r \to \infty$ (for alle $x \in (0, 2\pi)$).

(d) Minimumet må være et kritisk punkt, dvs. $f_x = 0$ og $f_r = 0$, dvs. $r^2 = \frac{4}{x^2 r}$, $2xr = \frac{2}{r^2} + \frac{4}{xr^2}$, dvs. $x^2r^3 = 4$, $2x^2r^3 = 2x + 4$, dvs. $x^2r^3 = 4$, $x^2r^3 = x + 2$. Dermed får vi $x + 2 = 4$, $\underline{x = 2}$, og fra $x^2r^3 = 4$ får vi $4r^3 = 4$, dvs. $\underline{r = 1}$.

$h = \frac{2}{xr^2} = \frac{2}{2\cdot 1^2} = \underline{1}$, overflatearealet blir $f(2,1) = 2 + 2 + \frac{4}{2} = \underline{6}$.