



*Bokmål*

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke  
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Torsdag 13. mai 2004

Kl. 9–13

Hjelpemidler: Alle trykte og skrevne hjelpemidler, én lommeregner

Sensur: 3. juni 2004

Oppgavene til avsluttende eksamen består av to deler:

1. Oppgavene på de neste sidene.
2. Vedlegg med flervalgsprøve.

Vedlegget skal leveres i utfylt stand sammen med besvarelsen for del (1). Ved vurderingen av avsluttende eksamen teller del (1) og (2) likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller midtsemesterprøve med 20 % hvis dette er til fordel for kandidaten.

I vurderingen av del (1) (de neste sidene) teller hvert bokstavpunkt likt.

I del (1) skal alle svar begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med). Reine kalkulatorsvar godtas ikke.

**Oppgave 1**

- a) Finn egenverdiene til

$$M = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

- b) Finn en egenvektor for hver av egenverdiene.

En maurkoloni har fordelt seg på to tuer,  $A$  og  $B$ . Til enhver tid vil 90 % av maurene som sist overnattet i tue  $A$  også overnatte der neste natt, mens 10 % av dem tilbringer neste natt i tue  $B$ . Av maurene som sist overnattet i tue  $B$ , flytter 50 % over til tue  $A$  neste natt, mens 50 % blir værende i tue  $B$ .

La  $x_n$  og  $y_n$  være antall maur som overnatter i henholdsvis tue  $A$  og  $B$  natt nr.  $n$ , der  $n \geq 0$  er et heltall.

- c) Forklar hvorfor

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

for alle heltall  $n \geq 1$ .

Uttrykk  $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$  ved hjelp av  $M$ ,  $n$  og  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ .

La  $x_0 = 18\,000$  og  $y_0 = 6\,000$ .

- d) Uttrykk
- $x_n$
- og
- $y_n$
- bare ved hjelp av
- $n$
- . Hvordan blir fordelingen av maur på de to tuene etter mange netter?

**Oppgave 2**

Et meieri skal starte produksjon av en ny ostetype. Osten skal ha form som et bløtkakestykke. Topp- og bunnflate er altså en sirkelsektor. La  $x$  være vinkelen i sirkelsektoren (målt i radianer), og la  $r$  være radien (lengden av sidekanten) av sirkelsektoren og  $h$  høyden av osten (begge målt i dm).

- a) Argumenter for at osten har volum

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{2} x r^2 h$$

(målt i  $\text{dm}^3$ , altså liter) og overflateareal

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi r^2 \cdot 2 + \frac{x}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot h + rh \cdot 2 = x r^2 + x r h + 2 r h$$

(målt i  $\text{dm}^2$ ).

Tegn en enkel skisse av osten.

Det blir bestemt at osten skal ha volum 1 liter, dvs.  $x r^2 h / 2 = 1$ .

- b) Vis at overflatearealet er

$$f(x, r) = x r^2 + \frac{2}{r} + \frac{4}{x r}$$

når volumet er lik 1.

Regn ut de partielle deriverte  $f_x$  og  $f_r$ .

- c) Har  $f$  noe absolutt maksimum i området  $0 < x < 2\pi$ ,  $r > 0$ ?

Meieriet ønsker å ha minst mulig overflate på osten for å ha minst mulig fare for muggdannelse.

- d) Finn  $x$  og  $r$  slik at osten (som har volum 1 liter) får minst mulig overflateareal. Hva blir  $h$  og overflatearealet? Det oppgis at  $f$  virkelig har et absolutt minimum i området  $0 < x < 2\pi$ ,  $r > 0$ .