MA0002 2004H – Løsningsskisse

1a. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0{,}6-\lambda & 0{,}8 \\ 0{,}9 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0{,}6\lambda - 0{,}72$.

$\det(A-\lambda I) = 0$: $\lambda = \frac{0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36+2{,}88}}{2} = \frac{0{,}6 \pm 1{,}8}{2} = 0{,}3 \pm 0{,}9$. Egenverdier $-0{,}6$ og $1{,}2$.

b. $(A+0{,}6I)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \underline{0}$: $\begin{bmatrix}1{,}2 & 0{,}8\\0{,}9 & 0{,}6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Egenvektor til $-0{,}6$: F.eks. $\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$.

$(A-1{,}2I)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \underline{0}$: $\begin{bmatrix}-0{,}6 & 0{,}8\\0{,}9 & -1{,}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Egenvektor til $1{,}2$: F.eks. $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.

c. $x_t = 0{,}6x_{t-1} + 0{,}8y_{t-1}$ og $y_t = 0{,}9x_{t-1}$ iflg. opplysningene. Dette kan skrives

$\begin{bmatrix}x_t\\y_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}8\\0{,}9 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{t-1}\\y_{t-1}\end{bmatrix}$, dvs. $\begin{bmatrix}x_t\\y_t\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x_{t-1}\\y_{t-1}\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}x_t\\y_t\end{bmatrix} = A^t\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$.

d. Største egenverdi, $1{,}2$, er relativ vekstrate i det lange løp. Tilhørende egenvektor, $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, angir forholdet mellom antall juvenile og antall voksne, dvs. $4:3$.

2a. Volum xyz, areal $xy + 2xz + 2yz$.

b. Når $xyz = 4$, er $z = \frac{4}{xy}$. Arealet blir da

$f(x,y) = xy + 2(x+y)\cdot\frac{4}{xy} = xy + 8\frac{x+y}{xy} = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

$f_x = y - \frac{8}{x^2}$, $f_y = x - \frac{8}{y^2}$.

c. Nei, vi kan få $f(x,y)$ så stor vi vil ved å f.eks. la $y=1$ og la x være stor nok.

d. I det abs. min. må $f_x = 0$ og $f_y = 0$, dvs. $y = \frac{8}{x^2}$ og $x = \frac{8}{y^2}$. Første likning innsatt i andre gir $x = \frac{8}{(8/x^2)^2}$, dvs. $x = \frac{x^4}{8}$, $x^3 = 8$, $x = 2$. Dette innsatt i første likning gir $y = 2$. Da er $z = \frac{4}{2\cdot 2} = 1$, og overflatearealet $f(2,2) = 4 + 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 12$.