MNFMA 001

19. Mai 2000

1

$$y(t) = y(0)e^{-\alpha t} \quad ; \quad \alpha > 0$$

$y(6) = 3/4\, y(0)$ gir: $3/4\, \cancel{y(0)} = \cancel{y(0)}e^{-6\alpha}$

eller: $6\alpha = \ln 4/3 = 0.2877$

$\alpha = 0.2877/6 = 0.0479$

Vi har altså:

$$y(t) = y(0)e^{-0.0479t}$$

$y(30) = y(0)e^{-0.0479 \cdot 30} = y(0) \cdot 0.2376$

Altså er $\underline{23.76\,\%}$ i live etter 30 sek. stråling.

Tiden det vil ta for at bare 10% skal være i live betegner vi ~~med~~ t_0: $\frac{1}{10}y(0) = y(t_0) = y(0)e^{-0.0479t_0}$, som gir

$$10 = e^{0.0479t_0}$$

eller $\ln 10 = 0.0479t_0$, d.v.s.

$2.3026 = 0.0479t_0 \quad \therefore \quad \underline{t_0 = 48.0707\text{ sek}}$

2

(a) f er definert alle $x \neq \pm 1$. $f(x) \neq 0$ for alle x

(b) $f(x) = (x^2-1)^{-1}$, $\underline{f'(x) = -2x(x^2-1)^{-2}}$

$f'(x) > 0$ når $x < 0$ og $f'(x) < 0$ når $x > 0$. $f'(x) = 0$ for $x = 0$ der f' skifter fortegn fra + til −. Altså har vi et lokalt maksimum for $x = 0$ der $f(0) = -1$. Vi ser at $f(x) \to \infty$ når $x \to -1-$ og $x \to 1+$, mens $f(x) \to -\infty$ når $x \to -1+$

og når $x \to 1-$. Altså har funksjonen hverken globalt maksimum eller globalt minimum.

(c) $f''(x) = -2(x^2-1)^{-2} + 4x(x^2-1)^{-3} \cdot 2x$

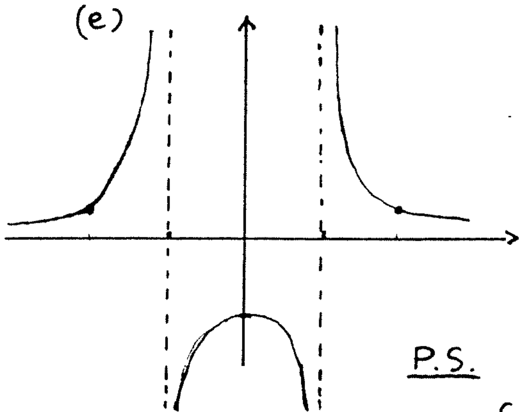
$$= \frac{2}{(x^2-1)^3}\left[-(x^2-1) + 4x^2\right] = \underline{\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}}$$

Siden telleren alltid er >0, avgjør nevneren fortegnet: $f''(x) > 0$ når $|x| > 1$, mens $f''(x) < 0$ når $|x| < 1$. $f''(x) \neq 0$ for alle x i def. mengden. Altså har vi ingen vendepunkt.

Kurven krummer oppover for $|x| > 1$ og nedover for $|x| < 1$.

(d) Ut fra det vi fant ut i (b) ovenfor er $x = -1$ og $x = 1$ vertikale asymptoter. Når $x \to \infty$ og når $x \to -\infty$ ser vi at $f(x) \to 0$. Altså er x-aksen horisontal asymptote.

(e)



Vi merker oss også at grafen er symmetrisk om y-aksen: $f(x) = f(-x)$

<u>P.S.</u> Burde selvsagt spurt om fortegnet til f selv i a) eller (b). Men det må jo undersökes når grafen skal tegnes.

#3

(a) (i) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = \underline{(x-1)e^x + C}$

(delvis integrasjon)

(ii) $\int (1+2t)^6 dt = \frac{1}{7}(1+2t)^7 \cdot \frac{1}{2} + C$

$= \underline{\frac{1}{14}(1+2t)^7 + C}$ (substitusj: $u = 1+2t$)

(b) Vi må beregne: $\int_0^{\frac{1}{2}} 3t^2\sqrt{1-t^3}\, dt$

For å beregne det ubestemte integral substituerer vi: $u = 1 - t^3$ og får

$du = -3t^2 dt$, og dermed:

$\int 3t^2\sqrt{1-t^3}\, dt = -\int u^{1/2} du = -\frac{2}{3}u^{3/2} + K$

$= -\frac{2}{3}(1-t^3)^{3/2} + K$.

Det søkte vann-volum blir derfor:

$\int_0^{1/2} 3t^2\sqrt{1-t^3}\, dt = -\frac{2}{3}(1-t^3)^{3/2}\Big|_{t=0}^{t=1/2}$

$= \frac{2}{3}\left[1^{3/2} - (1-\frac{1}{8})^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{7}{8})^3\right] = \frac{2}{3}[1 - 0.6699]$

$= \frac{2}{3}(0.3301) = \underline{0.2201 \text{ liter}}$

#4

$z^2 - z + \frac{1}{2} = z^2 - z + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = (z - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0$

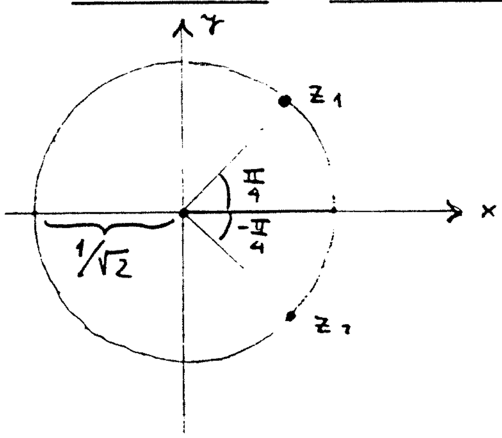
gir: $z - \frac{1}{2} = \pm\frac{i}{2}$ $\therefore$ $\underline{z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$, $\underline{z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}$

På polarkoordinatform:

$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

$\underline{z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$



#5

(a) Gauss-Jordan-eliminasjonen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot -3 \quad \cdot -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot -\frac{1}{5} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -1 \\ z &= -5 \end{aligned}$$

(b) Planets ligning har formen:

$$Ax + By + Cz = D, \qquad (A,B,C) \neq (0,0,0).$$

Siden $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (3,-2,3)$ og $P_3 = (2,2,1)$ ligger i planet må vi ha:

$$\begin{aligned} A + B \quad\quad &= D \\ 3A - 2B + 3C &= D \\ 2A + 2B + C &= D \end{aligned}$$

Dette er samme ligningssystemet som i (a) med høyre siden 5, 5, 5 erstattet med D, D, D.

Av regningen i (a) ser vi at ligningssystemet er entydig lösning – og dersom $D = 0$, må $A = B = C = 0$ være eneste lösning, i strid med antagelsen $(A,B,C) \neq (0,0,0)$. Vi innförer da $D = 5$ siden en av konstanten kan velges fritt $\neq 0$. Får da ligningssystemet i (a) og plan-ligningen: $6x - y - 5z = 5$

(c) Dersom P_1, P_2, P_3 lå på rett linje, ville vi hatt uendelig mange plan gjennom de tre punktene. Men siden regningen ovenfor gir et entydig bestemt plan, kan P_1, P_2 og P_3 ikke ligge på en rett linje.

#6

(a)

$a_2 = 2$ første nye par født.

$a_3 = 3$ nytt par født av 1. par
2. par ikke gamle nok

$a_4 = 5$ To første par får 2 par
3. par ikke gamle nok

$a_5 = 8$ Tre første par får 3 par
To nye par ikke gamle nok

$a_6 = 13$
$a_7 = 21$ } Alle par eldre enn en måned produserer et nytt par. Forrige måneds nye teller med, men produserer ingen nye.

(b) $\underline{a_{n+1} = a_n + a_{n-1}}$; a_{n+1} er summen av de vi hadde for 1 mnd. siden + antall nye par som er lik antallet vi hadde for 2 mnd. siden. Holder for $n \geq 1$.

(c) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + 1/(a_n/a_{n-1})$$

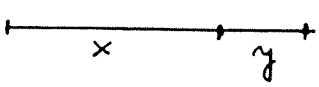
$$b_{n+1} = 1 + 1/b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = c = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/b_n) = 1 + 1/c$$

Altså har vi: $c = 1 + 1/c$ eller

$$c^2 - c - 1 = 0 \qquad c = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot -1\cdot 1})$$

$= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Må ha: $\underline{c = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$ siden c opplagt er ≥ 0. $(b_n > 0)$

(d) 

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

Setter vi $x/y = c$, gir det ovenstående:
$1 + \frac{1}{c} = c$, som ut fra (c) gir:

$$c = \underline{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})} \approx \underline{1.618}$$

siden c er et forhold mellom lengder og derfor > 0.

(e) Vi ser at $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} =$
$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ også gir det gyldne snitt.
Altså forholdet mellom antall kaninpar i to påfølgende år nærmer seg det gyldne snitt som grense.